Geometria Analítica
PURO-UFF - 2017.2
P1 - 22/nov/2017 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Diagramas muito ambíguos *serão* interpretados errado.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 1.0)** Prove que
a) **(0.2 pts)** se $\vec{v} \perp \vec{w}$ então $||\vec{v}+\vec{w}||^2 = ||\vec{v}||^2 + ||\vec{w}||^2$,
b) **(0.3 pts)** $||\vec{v}+\vec{w}||^2 = ||\vec{v}||^2 + ||\vec{w}||^2$ é falso em geral.
c) **(0.5 pts)** se $k < 0$ então $\cos(\mathrm{ang}(k\vec{v}, \vec{w})) = -\cos(\mathrm{ang}(\vec{v}, \vec{w}))$.
Dica: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\mathrm{ang}(\vec{u}, \vec{v}))\, ||\vec{u}||\, ||\vec{v}||$.

2) **(Total: 2.0)** Sejam

$$\begin{array}{rcl} r_0 & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2\,\}, \\ r & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1\,\}, \\ S_0 & = & \{\,P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, r_0) = 1\,\}, \\ S & = & \{\,P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, r) = 1\,\}. \end{array}$$

a) **(0.1 pts)** Represente graficamente r_0 e S_0.
b) **(0.4 pts)** Dê as coordenadas de um ponto de S.
c) **(0.5 pts)** O conjunto S é a união de duas retas, $S = r_1 \cup r_2$.
Represente graficamente r, r_1, r_2.
d) **(1.0 pts)** Dê equações — ou parametrizações — para r_1 e r_2.

3) **(Total: 1.5)** Sejam $A = (0,1)$, $B = (3,1)$ e $C = (5,3)$.
Qual é o ângulo mais agudo do triângulo ΔABC?

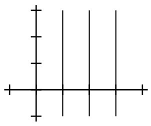
4) **(Total: 1.5)** Vamos definir as "coordenadas ab" da seguinte forma: $(a,b)_\Sigma = (0,2) + a\overrightarrow{(2,-1)} + b\overrightarrow{(0,1)}$.
a) **(0.3 pts)** Represente graficamente $(0,0)_\Sigma$, $(1,0)_\Sigma$, $(2,0)_\Sigma$, $(0,1)_\Sigma$, $(1,1)_\Sigma$, $(2,1)_\Sigma$, $(0,2)_\Sigma$, $(1,2)_\Sigma$ e $(2,2)_\Sigma$.
b) **(0.6 pts)** Dê a equação da reta que contém $(0,0)_\Sigma$, $(1,0)_\Sigma$ e $(2,0)_\Sigma$.
c) **(0.6 pts)** Dê a equação da reta que contém $(0,1)_\Sigma$, $(1,1)_\Sigma$ e $(2,1)_\Sigma$.

5) **(Total: 2.0)** Sejam $A = (0,1)$, $B = (0,4)$, $C = (2,0)$.
a) **(0.2 pts)** Calcule $\mathsf{área}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (a área de um paralelogramo).
b) **(0.3 pts)** Calcule $\mathsf{área}(\Delta ABC)$ (a área de um triângulo).
c) **(1.5 pts)** Encontre uma fórmula para $\mathsf{área}(\Delta(x,y)BC)$ e teste a sua fórmula em pelo menos três pontos para os quais essa área seja fácil de calcular no olhômetro. Dica: teste-a usando pontos que estão tanto abaixo quanto acima da reta que contém B e C.

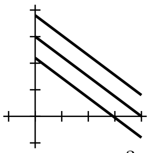
6) **(Total: 2.0)** Sejam C o círculo de centro $(0,0)$ e raio 2 e C' o círculo de centro $(2,2)$ e raio 2. Encontre os dois pontos $I_1, I_2 \in C \cap C'$ usando o método de subtrair as equações dos dois círculos. Obs: com os círculos nestas posições as contas são bem simples — o importante é você deixar elas claras e nomear os objetos que você construir.

Mini-gabarito (não revisado):

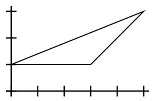
1a) Se $\vec{v} \perp \vec{w}$ então $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, $||\vec{v} + \vec{w}||^2 = (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w})$
$= \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{w} = ||\vec{v}||^2 + ||\vec{w}||^2$.
1b) $||\overrightarrow{(2,0)} + \overrightarrow{(3,0)}||^2 = 25$, $||\overrightarrow{(2,0)}||^2 + ||\overrightarrow{(3,0)}||^2 = 4 + 9 = 13$.
1c) $k < 0$ então $\cos(\mathrm{ang}(k\vec{v}, \vec{w})) = \frac{k\vec{v} \cdot \vec{w}}{||k\vec{v}||\,||\vec{w}||} = \frac{k\vec{v} \cdot \vec{w}}{-k||\vec{v}||\,||\vec{w}||} = -\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{||\vec{v}||\,||\vec{w}||} = -\cos(\mathrm{ang}(\vec{v}, \vec{w}))$.

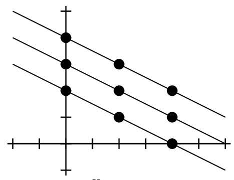
2a) 

2b) r passa por $(0,3)$ e tem $m = -\frac{3}{4}$; $\sqrt{1 + m^2} = \frac{5}{4}$; ponto: $(0, 3 + \frac{4}{5}) = (0, 3.8)$.

2c) 

2d) $y = 3.8 - \frac{3}{4}x$, $y = 2.2 - \frac{3}{4}x$.

3) 
$\cos \mathrm{ang}(B\hat{A}C) = \frac{\overrightarrow{(3,0)} \cdot \overrightarrow{(5,2)}}{||\overrightarrow{(3,0)}||\,||\overrightarrow{(5,2)}||} = \frac{15}{3\sqrt{29}}$
$\cos \mathrm{ang}(A\hat{C}B) = \frac{\overrightarrow{(-5,-2)} \cdot \overrightarrow{(-2,-2)}}{||\overrightarrow{(-5,-2)}||\,||\overrightarrow{(-2,-2)}||} = \frac{14}{\sqrt{29}\sqrt{8}}$
$\cos \mathrm{ang}(B\hat{A}C) > \cos \mathrm{ang}(A\hat{C}B)$ portanto $B\hat{A}C$ é mais agudo que $A\hat{C}B$.

4a) 

4b) $y = 2 - \frac{x}{2}$
4c) $y = 3 - \frac{x}{2}$

5a) $\text{área}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \text{área}(\overrightarrow{(0,3)}, \overrightarrow{(2,-1)}) = |(\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix})| = |-6| = 6$
5b) $\text{área}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\text{área}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 3$
5c) $\text{área}(\Delta(x,y)BC) = \frac{1}{2}\text{área}(\overrightarrow{(x,y)B}, \overrightarrow{(x,y)C}) = \frac{1}{2}\text{área}(\overrightarrow{(-x, 4-y)}, \overrightarrow{(2-x, -y)})$
$= \frac{1}{2}|(\begin{vmatrix} -x & 4-y \\ 2-x & -y \end{vmatrix})| = \frac{1}{2}|xy - (4-y)(2-x)| = \frac{1}{2}|xy - 8 + 4x + 2y - xy| = \frac{1}{2}|4x + 2y - 8|$
$= |2x + y - 4|$
$\text{área}(\Delta(0,1)BC) = 3$
$\text{área}(\Delta(2,0)BC) = 0$
$\text{área}(\Delta(0,4)BC) = 0$

6) $C = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4 = 0 \,\}$,
$C' = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-2)^2 - 4 = 0 \,\} = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 - 4 = 0 \,\} = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + y^2 - 4y + 4 = 0 \,\}$
$r = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 4y = 8 \,\} = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2 - x \,\}$
As soluções de $x^2 + (2-x)^2 - 4 = 0$ são $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$, daí $(x_1, y_1) = (0,2)$ e $(x_2, y_2) = (2,0)$.