Geometria Analítica
PURO-UFF - 2017.2
VR - 13/dez/2017 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Diagramas muito ambíguos *serão* interpretados errado.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

Lembre que uma equação de cônica é uma equação da forma $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$; $4+(x+y)(x-y)=5y$ não é uma equação de cônica mas é equivalente a uma: $x^2-y^2-5y+4=0$. E o truque pra gente se livrar das duas raízes quadradas em $\sqrt{A}+\sqrt{B}=C$ ou $\sqrt{A}-\sqrt{B}=C$ é:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{A}+\sqrt{B}=C & \Rightarrow & C^2(C^2-2(A+B))+(A-B)^2=0 \\ \sqrt{A}-\sqrt{B}=C & \Rightarrow & C^2(C^2-2(A+B))+(A-B)^2=0 \end{array}$$

1) **(Total: 3.0)** Considere esta equação:

$$d((x,y),(-4,0))-d((x,y),(4,0))=10 \qquad (*)$$

a) **(0.2 pts)** Encontre dois pontos da forma $(x,0)$ que obedecem $(*)$.
b) **(0.2 pts)** Encontre dois pontos da forma $(0,y)$ que obedecem $(*)$.
c) **(0.6 pts)** Quais são os "pontos óbvios" que obedecem $(ax+b)^2+(cy+d)^2=1$?
d) **(1.0 pts)** Encontre uma equação da forma $(ax+b)^2+(cy+d)^2=1$ cujas soluções "óbvias" sejam os pontos que você encontrou nos item a e b.
e) **(1.0 pts)** Converta a equação $(*)$ para uma cônica usando as fórmulas do início da página.

2) **(Total: 3.0)** Sejam $r=\{\,(t,2-2t,2t)\mid t\in\mathbb{R}\,\}$, $C=(0,0,4)$, π um plano que contém r e C, s uma reta ortogonal a π que passa por C.
a) **(0.5 pts)** Encontre o ponto $P\in r$ mais próximo de C.
b) **(0.5 pts)** Calcule $d(r,C)$.
c) **(0.5 pts)** O vetor $\overrightarrow{PC}$ é ortogonal a r?
d) **(0.5 pts)** Dê a equação do plano π.
e) **(0.5 pts)** Dê uma parametrização para s.
f) **(0.5 pts)** Encontre um ponto $Q\in s$ tal que $d(Q,\pi)=1$.

3) **(Total: 3.0)** Faça esboços das cônicas com as equações abaixo. Algumas delas são degeneradas. Em todos os itens abaixo considere que $u=2-y/2$ e $v=x+y+1$ — ou que u e v são *abreviações* para $2-y/2$ e $x+y+1$.

a) (0.5 pts)	$u(u-1)=0$	e) (0.2 pts)	$uv=0$
b) (0.5 pts)	$v(v-1)=0$	f) (0.4 pts)	$uv=1$
c) (0.2 pts)	$u^2+v^2=0$	g) (0.4 pts)	$uv=-1$
d) (0.3 pts)	$u^2+v^2=1$	h) (0.5 pts)	$u^2=v$
		i) (0.5 pts)	$u=v^2$

4) **(Total: 1.0)** Seja $(**)$ esta equação: $(2-y/2)(x+y+1)=1$.
a) **(0.8 pts)** Dê as coordenadas de quatro soluções de $(**)$.
b) **(0.2 pts)** Converta $(**)$ para uma equação de cônica.

Mini-gabarito (não revisado):

1a) $(-5,0)$ e $(5,0)$
1b) $(0,3)$ e $(0,-3)$
1c) $(\frac{-a}{b}, \frac{\pm 1-d}{c})$, $(\frac{\pm 1-a}{b}, \frac{-d}{c})$
1d) $(\frac{x}{5}+0)^2 + (\frac{y}{3}+0)^2 = 1$
1e) $d((x,y),(-4,0)) + d((x,y),(4,0)) = 10$
$\Rightarrow \sqrt{(x+4)^2+y^2} - \sqrt{(x-4)^2+y^2} = 2$. Sejam $C = 10$ e
$A = (x+4)^2 + y^2 = x^2 + 8x + 16 + y^2$,
$B = (x-2)^2 + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2$; então $A - B = 16x$ e
$A + B = 2(x^2 + 16 + y^2)$.
$\sqrt{A} - \sqrt{B} = C \Rightarrow C^2(C^2 - 2(A+B)) + (A-B)^2 = 0$
$\Rightarrow 100(100 - 4(x^2 + 16 + y^2)) + (16x)^2 = 0$
$\Rightarrow (10000 - 400x^2 - 6400 - 400y^2) + 256x^2 = 0$
$\Rightarrow -144x^2 - 400y^2 + 3600 = 0$

2) Sejam $A = (0,2,0)$, $B = (1,0,2)$ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(1,-2,2)}$; temos $r = \{\, A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$.
2a) $P = A + \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AC} = A + \frac{\overrightarrow{(1,-2,2)}\cdot\overrightarrow{(0,-2,4)}}{\overrightarrow{(1,-2,2)}\cdot\overrightarrow{(1,-2,2)}}\vec{u} = A + \frac{12}{9}\vec{u} = A + \overrightarrow{(\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{8}{3})} = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$
b) $\overrightarrow{PC} = (0,0,4) - (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{8}{3}) = \overrightarrow{(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})}$; $||\overrightarrow{PC}|| = \frac{2}{3}||\overrightarrow{(2,1,2)}|| = \frac{2}{3}\cdot 3 = 2$.
c) Sim: $\overrightarrow{PC}\cdot\vec{u} = \overrightarrow{(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})}\cdot\overrightarrow{(1,-2,2)} = 0$.
d) Podemos obter um vetor $\vec{n}$ normal a π fazendo $\vec{n} := \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(1,-2,2)}\times\overrightarrow{(0,-2,4)}$ $= \overrightarrow{(-4,-4,-2)} = 2\overrightarrow{(2,2,1)}$; $\pi = \{\, (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+2y+z = \alpha \,\}$; ajustando α temos $\pi = \{\, (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+2y+z = 4 \,\}$.
e) $s = setofstC + t\vec{n}t \in \mathbb{R}$.
f) $||\vec{n}|| = 3$; $\frac{\vec{n}}{||\vec{n}||} = \overrightarrow{(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})}$ é um vetor unitário normal a π; as soluções são $D = C + \frac{\vec{n}}{||\vec{n}||} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{13}{3})$ e $D' = C - \frac{\vec{n}}{||\vec{n}||} = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{11}{3})$.