Cálculo 2
PURO-UFF - 2018.1
P1 - 11/jun/2018 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 2.0)** Sejam $f(x) = 1/(x-1)$, $g(x) = -1/(x+1)$, $h(x) = f(x)+g(x)$.
a) **(0.5 pts)** Represente graficamente $f(x)$, $g(x)$, e $h(x)$.
b) **(1.5 pts)** A integral $\int_{x=-2}^{x=2} h(x)\,dx$ está definida? Sim, não, porquê? Tente dar uma explicação que alguém que só saiba vagamente a definição de integral via somatórios entenderia.

2) **(Total: 2.0)** Calcule $\int (\sin\theta)^4\,d\theta$ usando o truque do $E = c + is = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$.

3) **(Total: 2.0)** Calcule

$$\int \frac{4x^2 + x - 9}{x^2 - x - 2}\,dx.$$

4) **(Total: 1.5)** Calcule

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx.$$

5) **(Total: 1.5)** Demonstre usando as fórmulas para derivada de função inversa que $\frac{d}{dt}\arctan t = \frac{1}{x^2+1}$.

6) **(Total: 2.0)** Algumas integrais $\int f(x)\,dx$ podem ser calculadas usando integração por partes em $\int 1 \cdot f(x)\,dx$. Use este truque para calcular
a) **(0.5 pts)** $\int \ln x\,dx$,
b) **(1.5 pts)** $\int \arctan x\,dx$.

Mini-gabarito (não-revisado!!! TEM ERROS!!!)

1a) ainda não fiz os desenhos no computador.

1b) A integral $\int_{x=-2}^{x=2} h(x)\,dx$ está definida se e só se $\underline{\int}_{x=-2}^{x=2} h(x)\,dx = \overline{\int}_{x=-2}^{x=2} h(x)\,dx$, mas alguns limites de $h(x)$ são $+\infty$ e $-\infty$ dentro do intervalo $[-2,2]$, e isso faz com que para qualquer partição P de $[-2,2]$ nós tenhamos $\underline{\int}_P h(x)\,dx = -\infty$ e $\overline{\int}_P h(x)\,dx = +\infty$... portanto $\underline{\int}_{x=-2}^{x=2} h(x)\,dx = -\infty$ e $\overline{\int}_{x=-2}^{x=2} = +\infty$.

2) $(\sin\theta)^4 = (\frac{E-E^{-1}}{2i})^4 = \frac{(E-E^{-1})^4}{(2i)^4} = \frac{E^4-4E^2+6-4E^{-2}+E^{-4}}{16}$
$= \frac{1}{8}\frac{(E^4+E^{-4})-4(E^2+E^{-2})+6}{2} = \frac{1}{8}(\cos 4\theta - 4\cos 2\theta + 6)$
$\int(\sin\theta)^4\,d\theta = \int \frac{1}{8}(\cos 4\theta - 4\cos 2\theta + 6)\,d\theta = \frac{1}{8}\int(\cos 4\theta - 4\cos 2\theta + 6)\,d\theta$
$= \frac{1}{8}(\frac{\operatorname{sen} 4\theta}{4} - 4\frac{sen 2\theta}{2} + 6\theta) = \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{32} - \frac{sen 2\theta}{4} + \frac{3}{4}$

3) $\frac{4x^2+x-9}{x^2-x-2} = \frac{4(x^2-x-2)+5x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{4(x^2-x-2)+2(x-2)+3(x+1)}{(x+1)(x-2)} = 4 + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}$
$\int \frac{4x^2+x-9}{x^2-x-2}\,dx = \int 4 + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}\,dx = 4x + 2\ln|x+1| + 3\ln|x-2|$

4) $\int t\sqrt{1+t^2}\,dt = \int tzz^2\,d\theta = \int \frac{s}{c}\frac{1}{c^3}\,d\theta = \int \frac{s}{c^4}\,d\theta = \int c^{-4}s\,d\theta = -\int c^{-4}\,dc$
$= -\frac{c^{-3}}{-3} = \frac{c^{-3}}{3} = \frac{1}{3}(\cos\theta)^{-3} = \frac{1}{3}(\cos\arctan t)^{-3}$

5) $\frac{d}{dt}\tan\arctan t = \frac{d}{dt}t = 1$; $\frac{d}{dt}\tan\arctan t = (\tan'\arctan t)\arctan' t$; $\arctan' t = 1/(\tan'\arctan t)$;
$t' = (\frac{s}{c})' = \frac{s'c-sc'}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2$; $t^2+1 = z^2$; $\tan'\theta = (\sec\theta)^2 = (\tan\theta)^2+1$;
$\tan'\arctan t = (\tan\arctan t)^2 + 1 = t^2+1$; $\arctan' t = \frac{1}{\tan'\arctan t} = \frac{1}{t^2+1}$.

6a) $\int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\ln x}_{g}\,dx = \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\ln x}_{g} - \int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{x}}_{g}\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x$

6b) $\int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\arctan x}_{g}\,dx = \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\arctan x}_{g} - \int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{x^2+1}}_{g}\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

$\int \frac{t}{t^2+1}\,dt = \int t\sqrt{t^2+1}^{-2}\,dt = \int tz^{-2}\,z^2\,d\theta = \int c^{-1}s\,d\theta = -\int c^{-1}\,dc = -\ln|c|$
$= -\ln|\cos\theta| = -\ln|\cos\arctan t|$
$\int \arctan x\,dx = x\arctan x + \ln|\cos\arctan x|$