Cálculo 2
PURO-UFF - 2018.1
P2 - 4/julho/2018 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

Dica: algumas contas ficam bem mais fáceis se damos nomes para expressões que vão aparecer várias vezes. Por exemplo, se $f = e^{2x}\cos 3x$ podemos calcular f'' bem rapidamente se definimos $\underline{e} = e^{2x}$, $\underline{c} = \cos 3x$, $\underline{s} = \operatorname{sen} 3x$.

1) **(Total: 1.0)** Qual é o comprimento (de arco) da curva $y = \cos x$ entre $x = 0$ e $x = \pi$? Expresse-o como uma integral — não é preciso calculá-la.

2) **(Total: 2.0)** Qual é volume do conjunto $\{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \leq x, 0 \leq x \leq 4 \,\}$?

3) **(Total: 2.0)** Considere a seguinte EDO: $\frac{dy}{dx} = e^{3y}/(2x + 1)$.
a) **(1.0 pts)** Encontre a solução geral desta EDO.
b) **(1.0 pts)** Encontre uma solução $y = f(x)$ dela tal que $f(5) = 6$.

4) **(Total: 2.0)** Considere a seguinte EDO: $f'' - f' - 20f = 0$.
a) **(1.0 pts)** Encontre as duas soluções básicas dela, f_1 e f_2.
b) **(1.0 pts)** Encontre uma solução f_3 dela que obedeça $f_3(0) = 2$ e $f_3'(0) = 3$.

5) **(Total: 3.0)** Considere a seguinte EDO: $f'' - 4f' + 13f = 0$.
a) **(1.0 pts)** Encontre as duas soluções básicas complexas dela, f_1 e f_2; elas devem ser da forma $e^{(a+ib)x}$.
b) **(1.0 pts)** Encontre as duas soluções básicas reais dela, f_3 e f_4; elas devem ser da forma $(\cos cx)e^{dx}$ e $(\operatorname{sen} cx)e^{dx}$.
c) **(1.0 pts)** Verifique que f_3 obedece a EDO.

Mini-gabarito (não-revisado e sem os desenvolvimentos):

1) $\int_{x=0}^{x=\pi} \sqrt{1+(\frac{d}{dx}\cos x)^2}\,dx = \int_{x=0}^{x=\pi} \sqrt{1+(\operatorname{sen} x)^2}\,dx$

2) Seja $S = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2+z^2 \le x, 0 \le x \le 4\,\}$
$= \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{y^2+z^2} \le \sqrt{x}, 0 \le x \le 4\,\}$.
Para cada $x \in [0,4]$ se cortamos S no plano x constante obtemos um círculo de raio $\mathsf{raio}(x)$ e área $\pi\mathsf{raio}(x)^2$; repare que a gente pode usar um pouco de chutar-e-testar se a gente está em dúvida a respeito da fórmula pro $\mathsf{raio}(x)$:
$x=1 \Rightarrow y^2+z^2 \le 1 \Rightarrow \mathsf{raio}(1)=1$,
$x=2 \Rightarrow y^2+z^2 \le 2 \Rightarrow \mathsf{raio}(2)=\sqrt{2}$,
$x=3 \Rightarrow y^2+z^2 \le 3 \Rightarrow \mathsf{raio}(3)=\sqrt{3}$, etc.
O volume de S é $\int_{x=0}^{x=4} \pi\mathsf{raio}(x)^2\,dx = \int_{x=0}^{x=4} \pi x\,dx = \pi\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=4} = 8\pi$.

3a) $\frac{dy}{dx} = e^{3y}/(2x+1) \quad\Rightarrow\quad e^{-3y}dy = \frac{1}{2x+1}dx \quad\Rightarrow\quad \int e^{-3y}\,dy = \int \frac{1}{2x+1}\,dx$
$\Rightarrow\quad -\frac{1}{3}e^{-3y} = \frac{1}{2}\ln|x+\frac{1}{2}| + C_1 \quad\Rightarrow\quad e^{-3y} = -\frac{3}{2}\ln|x+\frac{1}{2}| + C_2$
$\Rightarrow\quad -3y = \ln(-\frac{3}{2}\ln|x+\frac{1}{2}| + C_2) \quad\Rightarrow\quad y = -\frac{1}{3}\ln(-\frac{3}{2}\ln|x+\frac{1}{2}| + C_2)$
3b) $e^{-3y} = -\frac{3}{2}\ln|x+\frac{1}{2}| + C_2 \quad\Rightarrow\quad C_2 = e^{-3\cdot 6} + \frac{3}{2}\ln(\frac{11}{2})$
$\Rightarrow\quad y = -\frac{1}{3}\ln(-\frac{3}{2}\ln|x+\frac{1}{2}| + (e^{-3\cdot 6} + \frac{3}{2}\ln(\frac{11}{2})))$

4) $(D^2f - D - 20)f = (D-5)(D+4)f$.
4a) $f_1 = e^{5x}$, $f_2 = e^{-4x}$.
4b) $f_1(0)=1$, $f_1'(0)=5$, $f_2(0)=1$, $f_2'(0)=-4$; se $f_3 = af_1+bf_2$ então $f_3(0)=a+b$ e $f_3'(0)=5a-4b$; queremos $a+b=2$ ($\Rightarrow b=2-a$) e $5a-4b=3$; $5a-8+4a=3$, $9a=11$, $a=\frac{11}{9}$, $b=\frac{7}{9}$, $f_3=\frac{11}{9}e^{5x}+\frac{7}{9}e^{-4x}$.

5) $(f''-4f'+13f=0) \quad\Rightarrow (D^2-4D+13)f = 0 = (D-(2+3i))(D-(2-3i))f$
5a) $f_1 = e^{(2+3i)x}$, $f_2 = e^{(2-3i)x}$.
5b) $f_3 = e^{2x}\cos 3x$, $f_4 = e^{2x}\operatorname{sen} 3x$.
5c) Sejam $\underline{e} = e^{2x}$, $\underline{c} = \cos 3x$, $\underline{s} = \operatorname{sen} 3x$.
Então $\underline{e}' = 2\underline{e}$, $\underline{c}' = -3\underline{s}$, $\underline{s}' = 3\underline{c}$,
$(\underline{ec})' = 2\underline{ec} - 3\underline{es}$,
$(\underline{es})' = 2\underline{es} + 3\underline{ec}$,
$(\underline{ec})'' = 2(\underline{ec})' - 3(\underline{es})' = (2\underline{ec} - 3\underline{es}) - 3(2\underline{es} + 3\underline{ec}) = 7\underline{ec} - 9\underline{es}$,
$(D^2-4D+13)f_3 = (\underline{ec})'' - 4(\underline{ec})' + 13\underline{ec} = (7\underline{ec} - 9\underline{es}) - 4(2\underline{es} + 3\underline{ec}) + 13\underline{ec}$

$f_3 = \underline{ec}$, $f_3' = 2\underline{ec}$