

Geometria Analítica
 PURO-UFF - 2018.1
 P1 - 11/jun/2018 - Eduardo Ochs
 Respostas sem justificativas não serão aceitas.
 Diagramas muito ambíguos serão interpretados errado.
 Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 2.0)** Sejam $A = (1, 4)$, $B = (2, 2)$, $C = (4, 1)$, r uma reta que passa por A e B , s uma reta ortogonal a r que passa por C , r' uma reta paralela a r que passa por C , D a interseção de r e s .

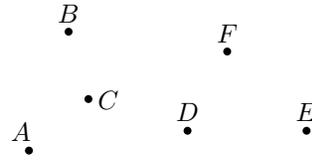
- (0.2 pts)** Se $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$, quem são a e b ?
- (0.4 pts)** Se $s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a'x + b'\}$, quem são a' e b' ?
- (0.4 pts)** Se $r' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a''x + b''\}$, quem são a'' e b'' ?
- (1.0 pts)** Dê as coordenadas do ponto D .

2) **(Total: 2.0)** Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{(0, 2)}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(3, 4)}$.

- (0.5 pts)** Represente graficamente os ângulos $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$ e $\text{ang}(-\vec{u}, \vec{v})$.
- (0.5 pts)** Calcule $\cos(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}))$ e $\cos(\text{ang}(-\vec{u}, \vec{v}))$.
- (1.0 pts)** Estime os ângulos $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$ e $\text{ang}(-\vec{u}, \vec{v})$ usando olhômetro e comparação com ângulos conhecidos. *Justifique.*

3) **(Total: 2.0)** Sejam A, B, C, D, E, F os pontos abaixo; note que você não tem as coordenadas deles. Represente graficamente:

- (0.5 pts)** $P = A + \text{Pr}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC}$
- (0.5 pts)** $Q = B + \text{Pr}_{\overrightarrow{BA}}\overrightarrow{BC}$
- (0.1 pts)** $R = D + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$
- (0.4 pts)** $S = D - \frac{1}{2}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE})$
- (0.5 pts)** $T = (E + 2\overrightarrow{DF}) - \overrightarrow{DE}$



Dicas: amplie o desenho em outra folha; nomeie todos os objetos intermediários.

4) **(Total: 2.0)** Seja $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + y^2 - 3y - 20 = 0\}$.

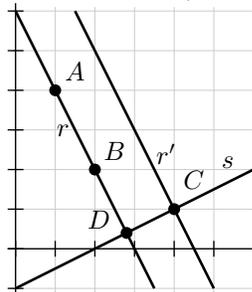
- (1.2 pts)** Reescreva C na forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2\}$.
- (0.8 pts)** Dê as coordenadas dos 4 pontos óbvios de C .

5) **(Total: 1.0)** Seja \vec{u} e \vec{v} dois vetores não-nulos e ortogonais entre si. Demonstre que para qualquer vetor \vec{w} temos $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w} \perp \text{Pr}_{\vec{v}}\vec{w}$.

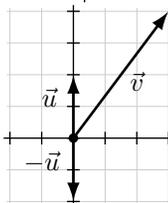
6) **(Total: 1.0)** Sejam $A = (0, 3)$ e $B = (3, 0)$, Encontre um ponto C tal que $\text{Área}(\triangle ABC) = 5$.

Mini-gabarito (não-revisado e sem os desenvolvimentos):

- 1)
 a) $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x + 4 \}$
 b) $s = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x - 1 \}$
 c) $r' = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x + 9 \}$
 d) $D = (2.8, 0.4)$



- 2)
 a) à direita.
 b) $\cos(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})) = \frac{4}{5}$,
 $\cos(\text{ang}(-\vec{u}, \vec{v})) = -\frac{4}{5}$.
 c) $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) \approx 40^\circ$,
 $\text{ang}(-\vec{u}, \vec{v}) \approx 140^\circ$.



3) (Ainda não deu pra eu fazer os desenhos no computador)

$$\begin{aligned} 4a) \quad C &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + y^2 - 3y - 20 = 0 \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 1)^2 - 1 + (y - 1.5)^2 - 2.25 = 20 \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 1)^2 + (y - 1.5)^2 = 23.25 \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 1)^2 + (y - 1.5)^2 = \sqrt{23.25}^2 \} \end{aligned}$$

4b) Centro $(-1, 1.5)$; pontos $(-1 \pm \sqrt{23.25}, 1.5)$, $(-1, 1.5 \pm \sqrt{23.25})$.

$$5) \Pr_{\vec{u}}\vec{w} \cdot \Pr_{\vec{v}}\vec{w} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} \cdot \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \cdot \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \right) (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \cdot \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \right) (0) = 0$$

6) Os livros resolveriam esse problema encontrando uma fórmula, mas deixa eu mostrar como a gente resolveria isso por uma espécie de “chutar e testar”...

$$\text{Área}(\triangle ABD) = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4.5,$$

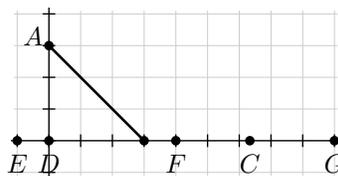
$$\text{Área}(\triangle ABE) = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6,$$

$$\text{Área}(\triangle ABF) = \frac{1 \cdot 3}{2} = 1.5,$$

$$\text{e se } G = (3 + b, 0), \quad b \geq 0,$$

$$\text{Área}(\triangle ABG) = \frac{b \cdot 3}{2} = \frac{3}{2}b.$$

$$\text{Solução: } b = \frac{2}{3}5, \quad C = \left(3 + \frac{10}{3}\right).$$



B