Geometria Analítica
PURO-UFF - 2018.1
P2 - 4/julho/2018 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Diagramas muito ambíguos *serão* interpretados errado.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 3.5)** Faça esboços das cônicas com as equações abaixo. Algumas delas são degeneradas. Em todos os itens abaixo considere que $u = y - 3$ e $v = x + y$ — ou que u e v são *abreviações* para $y - 3$ e $x + y$.

a) (0.1 pts) $x^2 + y^2 = 4$
b) (0.1 pts) $x^2 + y^2 = 0$
c) (0.1 pts) $y = x^2$
d) (0.1 pts) $x = y^2$
e) (0.1 pts) $xy = 1$
f) (0.1 pts) $xy = 0$
g) (0.1 pts) $xy = -4$
h) (0.1 pts) $x^2 = y^2$
i) (0.1 pts) $(x - 1)(x - 2) = 0$
j) (0.1 pts) $(y - 1)(x + y) = 0$
k) (0.2 pts) $u^2 + v^2 = 0$
l) (0.3 pts) $u^2 + v^2 = 4$
m) (0.5 pts) $v = u^2$
n) (0.5 pts) $u = v^2$
o) (0.2 pts) $uv = 0$
p) (0.4 pts) $uv = 2$
q) (0.4 pts) $uv = -1$

2) **(Total: 1.0)** Dê as coordenadas de quatro pontos de $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 3 = (x + y)^2 \}$. Dicas: use um dos gráficos que você fez no item anterior, e não esqueça de testar os seus pontos.

3) **(Total: 2.0)** Sejam $\pi = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 + 2x + 3y \}$, $\pi' = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \}$, $r = \pi \cap \pi'$.
a) **(0.2 pts)** Dê as coordenadas de dois pontos diferentes de r.
b) **(0.3 pts)** Dê uma parametrização para r.
c) **(0.2 pts)** Encontre um ponto de $r \cap \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \}$.
d) **(0.3 pts)** Encontre um ponto de $r \cap \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1 \}$.
e) **(0.5 pts)** Encontre $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $r = \{ (0, a, b) + t\overrightarrow{(1, c, d)} \mid t \in \mathbb{R} \}$.
f) **(0.5 pts)** Encontre o ponto de r mais próximo de $(2, 3, 4)$.

4) **(Total: 2.0)** Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{(0, 1, 1)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(2, 3, 4)}$, $\vec{a} = \overrightarrow{(1, 1, 0)}$, $\vec{b} = \overrightarrow{(0, 2, 1)}$. Encontre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{u} \perp (\vec{v} + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b})$.

5) **(Total: 1.5)** Sejam $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$, $C = (0, 0, 1)$, $D = (1, 1, 1)$, r a reta que passa por A e B, s a reta que passa por C e D. As retas r e s são coincidentes? São paralelas? São concorrentes? São reversas? Calcule $d(r, s)$.

Mini-gabarito (não-revisado e sem os desenvolvimentos):

1) Ainda não fiz os desenhos

2) $\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{y-3}_{u} = (\underbrace{x+y}_{v})^2\,\}$ (item (n)); os pontos mais fáceis são:

u	v	x	y
4	2	-5	7
1	1	-3	4
0	0	-3	3
1	-1	-5	4
4	-2	-9	7

3a) Por exemplo $A=(2,2,11)$ e $B=(3,3,16)$; note que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{(1,1,5)}$.
3b) $\{\,(2,2,11)+t\overrightarrow{(1,1,5)} \mid t\in\mathbb{R}\,\}$, $\{\,(x,x,5x+1) \mid x\in\mathbb{R}\,\}$.
3c) $(0,0,1)$
3d) $(1,1,6)$
3e) $\{\,(0,0,1)+t\overrightarrow{(1,1,5)} \mid t\in\mathbb{R}\,\}$
3f) Sejam $C=(0,0,1)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,1,5)}$, $D=(2,3,4)$. $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{(2,3,3)}$,
$C+\mathrm{Pr}_{\vec{v}}\overrightarrow{CD}=(0,0,1)+\frac{\overrightarrow{(1,1,5)}\cdot\overrightarrow{(2,3,3)}}{\overrightarrow{(1,1,5)}\cdot\overrightarrow{(1,1,5)}}\overrightarrow{(1,1,5)}=(0,0,1)+\frac{20}{27}\overrightarrow{(1,1,5)}=(\frac{20}{27},\frac{20}{27},\frac{127}{27})$

4) $\vec{v}+\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\overrightarrow{(2,3,4)}+\overrightarrow{(\alpha,\alpha,0)}+\overrightarrow{(0,2\beta,\beta)}=\overrightarrow{(2+\alpha,3+\alpha+2\beta,4+\beta)}$;
$\overrightarrow{(0,1,1)}\cdot\overrightarrow{(2+\alpha,3+\alpha+2\beta,4+\beta)}=3+\alpha+2\beta+4+\beta=7+\alpha+3\beta$;
$\vec{u}\perp(\vec{v}+\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}) \;\Rightarrow\; 7+\alpha+3\beta=0 \;\Rightarrow\; \alpha=-7-3\beta$.

5) Sejam $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{(-2,3,0)}$, $\vec{v}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{(1,1,0)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{(-2,0,1)}$.
Então $[\vec{u},\vec{v},\vec{v}]=\begin{vmatrix}-2&3&0\\1&1&0\\-2&0&1\end{vmatrix}=-5$, $\mathsf{Vol}(\vec{u},\vec{v},\vec{v})=5$;
$\vec{u}\times\vec{v}=\overrightarrow{(-2,3,0)}\times\overrightarrow{(1,1,0)}=\overrightarrow{(0,0,-5)}$, $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v})=5$.
As retas são reversas porque $[\vec{u},\vec{v},\vec{v}]\neq 0$, e $d(r,s)=\frac{\mathsf{Vol}(\vec{u},\vec{v},\vec{v})}{\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v})}=\frac{5}{5}=1$