Geometria Analítica
PURO-UFF - 2018.1
VR - 9/jul/2018 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Diagramas muito ambíguos *serão* interpretados errado.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 3.0)** Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{(0,1,1)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(2,3,4)}$, $\vec{a} = \overrightarrow{(1,1,0)}$, $\vec{b} = \overrightarrow{(0,2,1)}$. Encontre os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que façam $(\vec{v} + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b})$ ficar paralelo a $\vec{u}$.

2) **(Total: 3.0)** Sejam $\pi = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 3 \,\}$, $\pi' = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = 3 \,\}$, $A = (2,2,2)$. Sejam B o ponto de π mais próximo de A, C o ponto de π' mais próximo de A, $r = \pi \cap \pi'$, e D o ponto de r mais próximo de A.
a) **(0.5 pts)** Calcule as coordenadas de B.
b) **(0.5 pts)** Calcule as coordenadas de C.
c) **(0.5 pts)** Dê uma parametrização para r.
d) **(0.5 pts)** Calcule as coordenadas de D.
e) **(0.5 pts)** Demonstre — por uma conta — que A, B, C, D são coplanares.
f) **(0.5 pts)** Os pontos A, B, C, D também seriam coplanares se fizessemos a mesma construção começando com quaisquer outros A, π, π'. Explique — com um argumento em português, mas no qual você pode usar matematiquês e gráficos se quiser — porque isto é verdade. Dica: se π'' é o plano contendo A, B, C, D, qual é a relação entre o vetor normal a π'', os vetores normais a π e π', e o vetor diretor de r?

3) **(Total: 4.0)** Sejam $A = (1,2)$, $B = (5,4)$, $C = (7,0)$, $D = (x,y)$. Sejam r a reta dos pontos equidistantes de A e B, r' a reta dos pontos equidistantes de A e C, r'' a reta dos pontos equidistantes de A e D.
a) **(0.5 pts)** Dê uma parametrização para r.
b) **(0.5 pts)** Expresse r na forma $r = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b \,\}$.
c) **(0.5 pts)** Dê uma parametrização para r'.
d) **(0.5 pts)** Expresse r' na forma $r' = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a'x + b' \,\}$.
e) **(0.5 pts)** Calcule as coordenadas do ponto $P \in r \cap r'$.
f) **(0.5 pts)** Verifique que P é equidistante de B e C.
g) **(0.5 pts)** Dê uma parametrização para r''.
h) **(0.5 pts)** Expresse r'' na forma $r'' = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a''x + b'' \,\}$.

4) **(Total: 1.0)** Seja $S = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x+y)(2x-y) = 4 \,\}$.
a) **(0.5 pts)** Represente S graficamente.
b) **(0.5 pts)** Dê as coordenadas de quatro pontos de S.

Mini-gabarito (não-revisado e sem os desenvolvimentos):

1) Seja $\vec{w} = \vec{v} + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \overrightarrow{(2,3,4)} + \alpha\overrightarrow{(1,1,0)} + \beta\overrightarrow{(0,2,1)} = \overrightarrow{(2+\alpha, 3+\alpha+2\beta, 4+\beta)}$. Queremos $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{0}$; $\vec{u} \times \vec{w}$ $= \overrightarrow{(0,1,1)} \times \overrightarrow{(2+\alpha, 3+\alpha+2\beta, 4+\beta)} = \overrightarrow{(1-a-b, a+2, -a-2)}$, então $a = -2$, $b = 3$ $\vec{w} = \overrightarrow{(2,3,4)} + \alpha\overrightarrow{(1,1,0)} + \beta\overrightarrow{(0,2,1)} = \overrightarrow{(0,7,7)}$.

2a) $B = \{\, (2,2,2) + t\overrightarrow{(1,1,1)} \mid t \in \mathbb{R} \,\} \cap \pi = (1,1,1)$
2b) $C = \{\, (2,2,2) + t\overrightarrow{(1,1,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\} \cap \pi' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$
2c) r passa por $P = (3,0,0)$ e $Q = (0,3,0)$; $r = \{\, (x, 3-x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \,\}$.
2d) $D = P + \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{PQ}} \overrightarrow{PA} = (3,0,0) + \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{(-3,3,0)}} \overrightarrow{(-1,2,2)} =$
$(3,0,0) + \overrightarrow{(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)} = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$
2e) Dá pra fazer por determinante, mas repare que
$A, B, C, D \in \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \,\}$.
2f) Sejam $\vec{n}$ e $\vec{n}'$ os vetores normais a π e π'. A reta $r = \pi \cap \pi'$ é ortogonal a $\vec{n}$ e $\vec{n}'$ (...)

3a) $\frac{A+B}{2} = (3,3)$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(4,2)}$; $r = \{\, (3,3) + t\overrightarrow{(-2,4)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$.
3b) $r = \{\, (3,3) + t\overrightarrow{(1,-2)} \mid t \in \mathbb{R} \,\} = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 9 - 2x \,\}$.
3c) $\frac{A+C}{2} = (4,1)$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(6,-2)}$; $r' = \{\, (4,1) + t\overrightarrow{(2,6)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$.
3d) $r' = \{\, (4,1) + t\overrightarrow{(1,3)} \mid t \in \mathbb{R} \,\} = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -11 + 3x \,\}$.
3e) $9 - 2x = -11 + 3x \;\Rightarrow\; x = 4 \;\Rightarrow\; y = 1 \;\Rightarrow\; P = (4,1)$
3f)
3g) $\frac{A+D}{2} = (\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2})$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{(x-1, y-2)}$;
$r'' = \{\, (\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}) + t\overrightarrow{(x-1, y-2)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$.
3h) $r'' = \{\, (\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}) + t\overrightarrow{(1, \frac{y-2}{x-1})} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$= (...)$

4) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(2x+y)}_{u}\underbrace{(2x-y)}_{v} = 4 \,\}$; os pontos mais fáceis são:

u	v	x	y
2	2	1	0
1	4		
4	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
-2	-2	-1	0
-1	-4		
-4	-1		