Cálculo 2
PURO-UFF - 2018.2
P2 - 12/dez/2018 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 2.0)** Seja $(*)$ a seguinte EDO: $f'' + 3f' - 18f = 0$.
a) **(0.5 pts)** Expresse $(*)$ na forma $(D-a)(D-b)f = 0$.
b) **(0.5 pts)** Encontre as soluções básicas de $(*)$.
c) **(1.0 pts)** Encontre uma solução de $(*)$ que obedeça $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

2) **(Total: 2.5)** Seja $(**)$ a seguinte EDO: $f'' - 6f' + 25f = 0$.
a) **(0.5 pts)** Expresse $(**)$ na forma $(D-\alpha)(D-\overline{\alpha})f = 0$.
b) **(0.5 pts)** Encontre as soluções básicas de $(**)$.
c) **(1.0 pts)** Encontre as soluções básicas *reais* de $(**)$.
d) **(0.5 pts)** Teste uma das soluções que você encontrou no item anterior.

3) **(Total: 2.0)** Seja $(***)$ a seguinte EDO: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3}{y^4}$.
a) **(0.5 pts)** Encontre a solução geral de $(***)$ por variáveis separáveis.
b) **(0.5 pts)** Encontre uma solução de $(***)$ que passa pelo ponto $(6,7)$.
c) **(1.0 pts)** Teste a sua solução geral.

4) **(Total: 2.0)** Seja $(****)$ a seguinte EDO: $(2xy^3)\,dx + 3(x^2+3)y^2\,dy = 0$.
a) **(0.5 pts)** Verifique que $(****)$ é exata.
b) **(1.0 pts)** Encontre a solução geral de $(****)$.
c) **(0.5 pts)** Encontre uma solução de $(****)$ que passa pelo ponto (a,b).

5) **(Total: 1.5)** Sejam C e π_z os seguintes conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} C & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 4, y^2 + z^2 \le x\,\} \\ \pi_z & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\,\} \end{array}$$

a) **(0.5 pts)** Represente graficamente $C \cap \pi_z$.
b) **(1.0 pts)** Calcule o volume de C.

Mini-gabarito (não revisado)

1a) $(D-3)(D+6)f=0$
1b) $f_1=e^{3x}$, $f_2=e^{-6x}$,
1c) Seja $f=\alpha f_1+\beta f_2$. Então $f(0)=\alpha+\beta=1$ e $f'(0)=3\alpha-6\beta=0$; $\alpha=2\beta$, $\alpha=\frac{2}{3}$, $\beta=\frac{1}{3}$, $f=\frac{2}{3}e^{3x}+\frac{1}{3}e^{-6x}$.

2a) $(D-(3+4i))(D-\overline{(3+4i)})f=0$
2b) $f_1=e^{(3+4i)x}$, $f_2=e^{(3-4i)x}$
2c) $f_3=e^{3x}\cos 4x$, $f_4=e^{3x}\operatorname{sen} 4x$
2d) Sejam $F=e^{3x}$, $C=\cos 4x$, $S=\operatorname{sen} 4x$.
Então $F'=3F$, $C'=-4S$, $S'=4C$, $(FC)'=3FC-4FS$, $(FS)'=3FS+4FC$.
Seja $f=FC$, Então $f'=3FC-4FS$,
$f''=3(FC)'-4(FS)'=3(3FC-4FS)-4(3FS+4FC)=-7FC-24FS$,
$f''-6f'+25f=(-7FC-24FS)-6(3FC-4FS)+25(FC)=0$.

3a) $(x^2+3)dx=y^4dy \quad\Rightarrow\quad \int x^2+3\,dx=\int y^4\,dy \quad\Rightarrow\quad \frac{x^3}{3}+3x=\frac{y^5}{5}+C$
$\quad\Rightarrow\quad y^5=\frac{5}{3}x^3+15x+C' \quad\Rightarrow\quad y=\sqrt[5]{\frac{5}{3}x^3+15x+C'}$
3b) Queremos $x=6$, $y=7$, $7=\sqrt[5]{\frac{5}{3}6^3+15\cdot 6+C'}=\sqrt[5]{72+90+C'}$
$\quad\Rightarrow\quad 7^5=72+90+C' \quad\Rightarrow\quad C'=7^5-72-90$
$\quad\Rightarrow\quad y=\sqrt[5]{\frac{5}{3}x^3+15x+(7^5-72-90)}$.
3c) Sejam $g(x)=\frac{5}{3}x^3+15x+C'$, $f(x)=\sqrt[5]{g(x)}$. Então $g'(x)=5x^2+15$,
$f'(x)=\frac{1}{5}g(x)^{-4/5}g'(x)=\frac{1}{5}(g(x)^{1/5})^{-4}g'(x)=\frac{1}{5}f(x)^{-4}(5x^2+15)$
$=f(x)^{-4}(x^2+3)$;
$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+3}{y^4}$ corresponde a $f'(x)=\frac{x^2+3}{f(x)^4}$, ou seja, $f(x)^{-4}(x^2+3)=\frac{x^2+3}{f(x)^4}$. Ok!

4) Sejam $G(x,y)=2xy^3$, $H(x,y)=3(x^2+3)y^2$. A EDO é $Gdx+Hdy=0$.
4a) $G_y=6xy^2$, $H_x=6xy^2$; $G_y=H_x$, a EDO é exata.
4b) Seja $F=(x^2+3)y^3$. Então $F_x=2xy^3=G$, $F_y=(x^2+3)\cdot 3y^2=H$;
as soluções são as curvas de nível da F, i.e., $F(x,y)=C$.
$(x^2+3)y^3=C \quad\Rightarrow\quad y^3=\frac{C}{x^2+3} \quad\Rightarrow\quad y=\sqrt[3]{\frac{C}{x^2+3}}$
4c) Quando $x=a$ e $y=b$ temos $b=\sqrt[3]{\frac{C}{a^2+3}} \quad\Rightarrow\quad b^3=\frac{C}{a^2+3}$
$\quad\Rightarrow\quad C=(a^2+3)b^3 \quad\Rightarrow\quad y=\sqrt[3]{\frac{(a^2+3)b^3}{x^2+3}}$.

5a) Seja $f(x)=\sqrt{x}$; $C\cap\pi_x=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 4, -\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x}\,\}$.
5b) Volume $=\int_{x=0}^{x=4}\pi f(x)^2\,dx$; $\int\pi f(x)^2\,dx=\int\pi x\,dx=\frac{\pi}{2}x^2$;
Volume $=\int_{x=0}^{x=4}\pi f(x)^2\,dx=\frac{\pi}{2}x^2\big|_{x=0}^{x=4}=8\pi$.