Matemática Discreta
PURO-UFF - 2018.2
P2 - 17/dez/2018 - Eduardo Ochs
Turma grande (V1, com aulas nas segundas e quartas)
Respostas sem justificativas não serão aceitas *em algumas questões*.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 2.0)** Sejam $(R1)$, $(R2)$, $(R3)$ as regras abaixo:

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}\ (R1) \qquad \frac{A \vdash C}{A \lor B \vdash C}\ (R2) \qquad \frac{A \vdash B}{A \vdash B \land C}\ (R3)$$

a) **(1.0 pts)** Mostre que a regra $(R1)$ é admissível.
b) **(0.5 pts)** Mostre que a regra $(R2)$ é inadmissível.
c) **(0.5 pts)** Mostre que a regra $(R3)$ é inadmissível.

2) **(Total: 4.0)** Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $P(k)$ a seguinte proposição: $1+3+\ldots+(2k+1) = (k+1)^2$.
a) **(0.5 pts)** Verifique $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$.
b) **(0.5 pts)** Defina uma função $f(k)$, sem '$\ldots$'s mas usando somatório, tal que $f(k) = 1 + 3 + \ldots + (2k+1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
c) **(0.5 pts)** Teste a sua definição do $f(k)$ usando $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$.
d) **(0.5 pts)** Calcule $f(21) - f(20)$.
e) **(1.5 pts)** Demonstre $k \in \mathbb{N} \vdash P(k) \to P(k+1)$.
f) **(0.5 pts)** Demonstre $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$.

3) **(Total: 2.0)** Seja $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função que obedece:
(F0) $F(0,0) = 0$,
(FT) $\forall n \in \mathbb{N}.F(0,n) + 1 = F(n+1,0)$,
(FD) $\forall x,y \in \mathbb{N}.1 \leq x \to F(x,y) + 1 = F(x-1,y+1)$.
a) **(1.0 pts)** Calcule os valores de $F(x,y)$ em pelo menos 10 pontos de $\mathbb{N}^2$.
b) **(1.0 pts)** Represente graficamente a função F.

4) **(Total: 2.0)** Seja $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ e sejam $f,g : A \to A$ as seguintes permutações:
$f = (1\ 2\ 3)(4\ 5) \qquad (= \{(1,2),(2,3),(3,1),(4,5),(5,4),(6,6)\})$
$g = (3\ 4)$
a) **(0.5 pts)** Calcule $f \circ g$ e $g \circ f$ e expresse-os na notação de ciclos.
b) **(0.5 pts)** Calcule $f, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6$ e expresse-os na notação de ciclos.
c) **(1.0 pts)** Calcule f^{20} e expresse-o na notação de ciclos.

5) **(Total: 1.0)** Sejam $A = \{2,3,4\}$, $B = \{3,4,5\}$.
a) **(0.2 pts)** Exiba um elemento de B^A.
b) **(0.2 pts)** Exiba um elemento de A^B.
c) **(0.3 pts)** Exiba um elemento $f \in B^A$ que obedeça $f : A \to A$.
d) **(0.3 pts)** Exiba um elemento $g \in B^A$ que obedeça $\neg(g : A \to A)$.

Dicas:
$(\exists! x \in A.P(a)) \;=\; (\exists x \in A.P(a)) \land (\forall x', x'' \in A.P(x') \land P(x'') \to x' = x'')$
$(f : A \to B) \;=\; (f \subseteq A \times B) \land (\forall a \in A.\exists! b \in B.(a,b) \in f)$
$\{a, a+1, \ldots, b\} \;=\; \{\, k \in \mathbb{Z} \mid a \leq k \leq b \,\}$
Se f,g são funções então $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$
Se A,B são conjuntos então $B^A = \{\, f \mid f : A \to B \,\}$
$\sum_{i=2}^{4} 10^i = 11100, \quad \sum_{i=4}^{2} 10^i = 0$

Mini-gabarito (não revisado)

1a) Sejam $\alpha = (\Gamma \to (A \to B))$, $\beta = (\Gamma \to \neg B)$, $\gamma = (\Gamma \to \neg A)$. Então:

Γ	A	B	$\Gamma \to (A \to B)$	$\Gamma \to \neg B$	$\Gamma \to \neg A$	$\alpha \wedge \beta \to \gamma$
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**
V	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**

1b) Quando $A = \mathbf{F}$, $B = \mathbf{V}$, $C = \mathbf{F}$ temos $(A \to C) \to (A \vee B \to C) = \mathbf{F}$.
1c) Quando $A = \mathbf{V}$, $B = \mathbf{V}$, $C = \mathbf{F}$ temos $(A \to B) \to (A \to B \wedge C) = \mathbf{F}$.

2a) $P(0) = (1 = (0+1)^2) = \mathbf{V}$; $P(1) = (1 + (1 \cdot 1 + 1) = (1+1)^2) = \mathbf{V}$;
$P(2) = (1 + 3 + (2 \cdot 1 + 1) = (2+1)^2) = \mathbf{V}$; $P(3) = (1 + 3 + 5 + (3 \cdot 1 + 1) = (3+1)^2) = \mathbf{V}$.
2b) $f(k) = \sum_{i=0}^{k} 2i + 1$
2c) $f(0) = 2 \cdot 0 + 1$, $f(1) = 1 + 3$. $f(2) = 1 + 3 + 5$, $f(3) = 1 + 3 + 5 + 7$.
2d) $f(21) - f(20) = (\sum_{i=0}^{21} 2i + 1) - (\sum_{i=0}^{20} 2i + 1) = 2 \cdot 21 + 1 = 43$
2e) Temos:

$$\begin{array}{rcl}
f(k+1) & = & 1 + 3 + \ldots + (2k+1) + (2(k+1)+1) \\
 & = & f(k) + (2(k+1)+1) \\
 & = & f(k) + 2k + 3 \\
f(k+1) - f(k) & = & k + 3 \\
(k+2)^2 & = & k^2 + 4k + 4 \\
(k+1)^2 & = & k^2 + 2k + 1 \\
(k+2)^2 - (k+1)^2 & = & 2k + 3 \\
 & = & f(k+1) - f(k)
\end{array}$$

1) Suponha $k \in \mathbb{N}$
2) Suponha $P(k)$
3) Então $1 + 3 + \ldots + (2k+1) = (k+1)^2$
4) Então $f(k) = (k+1)^2$
5) Então $f(k+1) - f(k) = (k+2)^2 - (k+1)^2$
6) Então $f(k) + (f(k+1) - f(k)) = (k+1)^2 + ((k+2)^2 - (k+1)^2)$
7) Então $f(k+1) = (k+2)^2$
8) Então $P(k+1)$
9) Então $P(k) \to P(k+1)$ (fecha 2)

2f) Sabemos $P(0)$ e $\forall k \in \mathbb{N}. P(k) \to P(k+1)$. Por indução, $\forall n \in \mathbb{N}. P(n)$.

3a)

Por (F0),	$F(0,0) = 0$
Fazendo $n = 0$ em (FT),	$F(0,0) + 1 = F(1,0) = 1$
Fazendo $x = 1, y = 0$ em (FD),	$F(1,0) + 1 = F(0,1) = 2$
Fazendo $n = 1$ em (FD),	$F(0,1) + 1 = F(2,0) = 3$
Fazendo $x = 2, y = 0$ em (FD),	$F(2,0) + 1 = F(1,1) = 4$
Fazendo $x = 1, y = 1$ em (FD),	$F(1,1) + 1 = F(0,2) = 5$
Fazendo $n = 2$ em (FD),	$F(0,2) + 1 = F(3,0) = 6$
Fazendo $x = 3, y = 0$ em (FD),	$F(3,0) + 1 = F(2,1) = 7$
Fazendo $x = 2, y = 1$ em (FD),	$F(2,1) + 1 = F(1,2) = 8$
Fazendo $x = 1, y = 2$ em (FD),	$F(1,2) + 1 = F(0,3) = 9$

3b)

$$\begin{array}{llll}
F(0,3) = 9 & & & \\
F(0,2) = 5 & F(1,2) = 8 & & \\
F(0,1) = 2 & F(1,1) = 4 & F(2,1) = 7 & \\
F(0,0) = 0 & F(1,0) = 1 & F(2,0) = 3 & F(3,0) = 6
\end{array}$$

4a)

x	$f(x)$	$g(x)$	$f(g(x))$	$g(f(x))$
1	2	1	$f(g(1)) = f(1) = 2$	$g(f(1)) = g(2) = 2$
2	3	2	$f(g(2)) = f(2) = 3$	$g(f(2)) = g(3) = 4$
3	1	4	$f(g(3)) = f(4) = 5$	$g(f(3)) = g(1) = 1$
4	5	3	$f(g(4)) = f(3) = 1$	$g(f(4)) = g(5) = 5$
5	4	5	$f(g(5)) = f(5) = 4$	$g(f(5)) = g(4) = 3$
6	6	6	$f(g(6)) = f(g) = 6$	$g(f(6)) = g(6) = 6$

$f \circ g = (1\ 2\ 3\ 5\ 4)$
$g \circ f = (1\ 2\ 4\ 5\ 3)$

4b) $f = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$
$f^2 = (1\ 3\ 2)$
$f^3 = (4\ 5)$
$f^4 = (1\ 2\ 3)$
$f^5 = (1\ 3\ 2)(4\ 5)$
$f^6 = ()$

4c) $f^{20} = f^6 \circ f^6 \circ f^6 \circ f^2 = () \circ () \circ () \circ (1\ 3\ 2) = (1\ 3\ 2)$

5a) Soluções: $\{(2, x), (3, y), (4, z)\}$ com $x, y, z \in B$
5b) Soluções: $\{(3, x), (4, y), (5, z)\}$ com $x, y, z \in A$
5c) Soluções: $f = \{(2, x), (3, y), (4, z)\}$ com $x, y, z \in B \cap A = \{3, 4\}$
5d) Por exemplo $g = \{(2, x), (3, y), (4, 2)\}$ com $x, y \in B$