Matemática Discreta
PURO-UFF - 2018.2
VR - 18/dez/2018 - Eduardo Ochs
Ambas as turmas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.
Erros de tipo — p.ex. confundir números com conjuntos,
listas ou valores de verdade — são considerados erros graves.

1) **(Total: 1.0)** Vamos definir a operação Δ por: $A\Delta B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.
Calcule $(A\Delta B)\Delta C$ e $A\Delta(B\Delta C)$ no caso em que $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 6, 7\}$, $C = \{4, 5, 6, 7\}$.

2) **(Total: 2.0)** Seja $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função que obedece:
(F0) $F(0, 0) = 0$,
(FV) $\forall y \in \mathbb{N}.F(0, y + 1) = F(0, y) + 1$,
(FH) $\forall x \in \mathbb{N}.F(x + 1, 0) = F(x, 0) + 10$,
(FM) $\forall x, y \in \mathbb{N}.F(x + 1, y + 1) = F(x, y + 1) + F(x + 1, y)$.
a) **(1.0 pts)** Calcule $F(3, 3)$.
b) **(1.0 pts)** Represente graficamente os valores de $F(x, y)$ para $(x, y) \in \{0, 1, 2, 3\}^2$.

3) **(Total: 2.0)** Sejam $C(a, b, f) := \{\, f(x) \mid x \in \{a, \dots, b\} \,\}$,
$D(a, c, f) := (\forall b \in \{a, \dots, c - 1\}.f(b + 1) \notin C(a, b, f))$,
$g := \{(2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 3)\}$.
a) **(0.5 pts)** Calcule $C(3, 4, g)$.
b) **(1.5 pts)** Calcule $D(2, 5, g)$.

4) **(Total: 3.5)** Seja $(*)$ a seguinte proposição: *todo inteiro ímpar é soma de dois inteiros consecutivos*.
a) **(0.5 pts)** Traduza $(*)$ para notação matemática.
b) **(3.0 pts)** Demonstre $(*)$ no formato com "então"s e "suponha"s.

5) **(Total: 4.0)** Sejam: $f(k) := k \cdot 10^k$, $P(k) := (f(k) = 200)$,
$g(k) := 9 + 9 \cdot 10 + \ldots + 9 \cdot 10^{k-1}$, $h(k) := 10^k - 1$, $Q(k) := (g(k) = h(k))$.
a) **(0.2 pts)** Calcule $f(k)$ e $P(k)$ para $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.
b) **(0.2 pts)** Calcule $\sum_{i=2}^{6} f(i)$ e $\sum_{i=1}^{4} f(2i)$.
c) **(1.0 pts)** Defina usando somatório uma função $s(k)$ que se comporte como a função $g(k)$, e teste-a verificando se $s(3) = g(3)$, $s(4) = g(4)$, $s(5) = g(5)$.
d) **(0.2 pts)** Calcule $s(-2)$, $s(-1)$, $s(0)$.
e) **(0.4 pts)** Seja $R(k) := (s(k) = h(k))$. Calcule $R(2)$, $R(1)$, $R(0)$, $R(-1)$.
f) **(2.0 pts)** Mostre que se $k \in \mathbb{N}^+$ então $Q(k) \to Q(k + 1)$.

Dicas:
$\{a, a+1, \ldots\} \;=\; \{\, k \in \mathbb{Z} \mid a \leq k \,\}$
$\{a, a+1, \ldots, b\} \;=\; \{\, k \in \mathbb{Z} \mid a \leq k \leq b \,\}$
$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \ldots\}$
$\sum_{i=2}^{4} 10^i = 11100, \quad \sum_{i=4}^{2} 10^i = 0$
Se $P(x) = (x = x^2)$ então $P(0) = \mathbf{V}$, $P(1) = \mathbf{V}$, $P(2) = \mathbf{F}$
Se A, B são conjuntos então $A \times B = \{\, (a, b) \mid a \in A, b \in B \,\}$
Se A, B são conjuntos então $A \backslash B = \{\, a \in A \mid a \notin B \,\}$
$(\exists! x \in A.P(a)) \;=\; (\exists x \in A.P(a)) \wedge (\forall x', x'' \in A.P(x') \wedge P(x'') \to x' = x'')$
$(f : A \to B) \;=\; (f \subseteq A \times B) \wedge (\forall a \in A.\exists! b \in B.(a, b) \in f)$
Se f, g são funções então $(f \circ g)(x) = f(g(x)),\ f^2 = f \circ f,\ f^3 = f \circ f \circ f$
Se A, B são conjuntos então $B^A = \{\, f \mid f : A \to B \,\}$
Se B é um conjunto então $\mathcal{P}(B) = \{\, A \mid A \subseteq B \,\}$
$\mathsf{par}(b) := (\exists a \in \mathbb{Z}.2a = b)$; $\mathsf{impar}(b) := (\exists a \in \mathbb{Z}.2a + 1 = b)$.

Uma demonstração com '$\forall$' e '$\exists$':
1) Suponha $a \in \mathbb{Z}$
2) Suponha $\mathsf{impar}(a)$
3) Então $\mathsf{impar}(a)$
4) Então $\exists b \in \mathbb{Z}.2b + 1 = a$ (Por 3, def)
5) Suponha $b \in \mathbb{Z}, 2b + 1 = a$
6) Então $a^2 = (2b+1)^2 = 4b^2 + 4b + 1 = 2(b^2 + 2b) + 1$
7) Então $2b^2 + 2b \in \mathbb{Z} \wedge 2(b^2 + 2b) + 1 = a^2$
8) Então $\exists c \in \mathbb{Z}.2c + 1 = a^2$ $(c := 2b^2 + 2b)$
9) Então $\mathsf{impar}(a^2)$
10) Então $\mathsf{impar}(a^2)$ (Usa 4, fecha 5)
11) Então $\mathsf{impar}(a) \to \mathsf{impar}(a^2)$ (fecha 2)
12) Então $\forall a \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \to \mathsf{impar}(a^2)$ (fecha 1)

Uma demonstração por indução:
1) Lema: $\forall a \in \mathbb{Z}.\mathsf{par}(a) \to \mathsf{impar}(a+1)$
2) Lema: $\forall a \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \to \mathsf{par}(a+1)$
3) Suponha $n \in \mathbb{N}$
4) Então $n \in \mathbb{Z}$
5) Então $\mathsf{par}(n) \to \mathsf{impar}(n+1)$ (Por 1, com $a := n$)
6) Então $\mathsf{impar}(n) \to \mathsf{par}(n+1)$ (Por 2, com $a := n$)
7) Então $\mathsf{par}(n) \vee \mathsf{impar}(n) \to \mathsf{par}(n+1) \vee \mathsf{impar}(n+1)$ (Por 5 e 6)
8) Então $\forall n \in \mathbb{N}.\mathsf{par}(n) \vee \mathsf{impar}(n) \to \mathsf{par}(n+1) \vee \mathsf{impar}(n+1)$ (Fecha 4)
9) Lema: $\mathsf{par}(0)$
10) Então $\mathsf{par}(0) \vee \mathsf{impar}(0)$
11) Então $\forall n \in \mathbb{N}.\mathsf{par}(n) \vee \mathsf{impar}(n)$ (Por 10 e 8)

Mini-gabarito (não revisado)

1)
$$
\begin{array}{rcl}
A\Delta B & = & \{1,3,5,7\}\Delta\{2,3,6,7\} \\
 & = & (\{1,3,5,7\}\backslash\{2,3,6,7\}) \cup (\{2,3,6,7\}\backslash\{1,3,5,7\}) \\
 & = & \{1,5\} \cup \{2,6\} \\
 & = & \{1,2,5,6\} \\
B\Delta C & = & \{2,3,6,7\}\Delta\{4,5,6,7\} \\
 & = & \{2,3,4,5\} \\
(A\Delta B)\Delta C & = & \{1,2,5,6\}\Delta\{4,5,6,7\} \\
 & = & \{1,2,4,7\} \\
A\Delta(B\Delta C) & = & \{1,3,5,7\}\Delta\{2,3,4,5\} \\
 & = & \{1,2,4,7\}
\end{array}
$$

2a) Veja abaixo.

2b)
$$
\begin{array}{llll}
F(0,3)=3 & F(1,3)=16 & F(2,3)=60 & F(3,3)=165 \\
F(0,2)=2 & F(1,2)=13 & F(2,2)=44 & F(3,2)=105 \\
F(0,1)=1 & F(1,1)=11 & F(2,1)=31 & F(3,1)=61 \\
F(0,0)=0 & F(1,0)=10 & F(2,0)=20 & F(3,0)=30
\end{array}
$$

3a) $C(3,4,g) = \{\, g(x) \mid x \in \{3,4\} \,\} = \{g(3), g(4)\} = \{4,5\}$

$$
\begin{array}{rcl}
C(2,2,g) & = & \{g(2)\} = \{3\} \\
C(2,3,g) & = & \{g(2), g(3)\} = \{3,4\} \\
C(2,4,g) & = & \{g(2), g(3), g(4)\} = \{3,4,5\} \\
D(2,5,g) & = & \forall b \in \{2,\ldots,4\}.g(b+1) \notin C(2,b,g) \\
 & = & \forall b \in \{2,3,4\}.g(b+1) \notin C(2,b,g)
\end{array}
$$

3b)
$$
\begin{array}{rl}
= & (g(2+1) \notin C(2,2,g)) \land \\
 & (g(3+1) \notin C(2,3,g)) \land \\
 & (g(4+1) \notin C(2,4,g)) \\
= & g(3) \notin \{3\} \land g(4) \notin \{3,4\} \land g(5) \notin \{3,4,5\} \\
= & 4 \notin \{3\} \land 5 \notin \{3,4\} \land 6 \notin \{3,4,5\} \\
= & \mathbf{V}
\end{array}
$$

4a) $\forall a \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \to \exists b \in \mathbb{Z}.a = b + (b+1)$

4b) 1) Suponha $a \in \mathbb{Z}$, $\mathsf{impar}(a)$
2) Então $\mathsf{impar}(a)$
3) Então $\exists k \in \mathbb{Z}.2k+1 = a$
4) Suponha $k \in \mathbb{Z}$, $2k+1 = a$
5) Então $a = k + (k+1)$
6) Então $\exists b \in \mathbb{Z}.a = b + (b+1)$ $\quad (b := k)$
7) Então $\exists b \in \mathbb{Z}.a = b + (b+1)$ (usa 3, fecha 4)
8) Então $\mathsf{impar}(a) \to \exists b \in \mathbb{Z}.a = b + (b+1)$ (fecha 2)
9) Então $\forall a \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(a) \to \exists b \in \mathbb{Z}.a = b + (b+1)$ (fecha 1)

5a) $f(0) = 0$, $f(1) = 10$, $f(2) = 200$, $f(3) = 3000$,
$P(0) = \mathbf{F}$, $P(1) = \mathbf{F}$, $P(2) = \mathbf{V}$, $P(3) = \mathbf{F}$

5b) $\sum_{i=2}^{6} f(i) = 6543200$, $\sum_{i=1}^{4} f(2i) = 806040200$.

5c) Seja $s(k) = \sum_{i=0}^{k-1} 9 \cdot 10^i$. Então:

$$\begin{array}{rcl} s(3) & = & \sum_{i=0}^{3-1} 9 \cdot 10^i \quad = \quad 9 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^2 \\ & = & g(3) \\ s(4) & = & \sum_{i=0}^{4-1} 9 \cdot 10^i \quad = \quad 9 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^3 \\ & = & g(4) \\ s(5) & = & \sum_{i=0}^{5-1} 9 \cdot 10^i \quad = \quad 9 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^4 \\ & = & g(5) \end{array}$$

5d) $s(-2) = \sum_{i=0}^{-2-1} 9 \cdot 10^i = 0$
$s(-1) = \sum_{i=0}^{-1-1} 9 \cdot 10^i = 0$
$s(0) = \sum_{i=0}^{0-1} 9 \cdot 10^i = 0$

5e) $R(2) = (s(2) = h(2)) = (99 = 10^2 - 1) = \mathbf{V}$
$R(1) = (s(1) = h(1)) = (9 = 10^1 - 1) = \mathbf{V}$
$R(0) = (s(0) = h(0)) = (0 = 10^0 - 1) = \mathbf{V}$
$R(-1) = (s(-1) = h(-1)) = (0 = 10^{-1} - 1) = \mathbf{F}$

5f) 1) Suponha $k \in \mathbb{N}^+$
2) Suponha $Q(k)$
3) Então $g(k) = h(k)$
4) Então $g(k+1) - g(k) = 9 \cdot 10^k$
5) Então $h(k+1) = 10^{k+1} - 1$
6) Então $\begin{array}{rcl} h(k+1) - h(k) & = & (10^{k+1} - 1) - (10^k - 1) \\ & = & 10 \cdot 10^k - 10^k \\ & = & 9 \cdot 10^k \end{array}$
7) Então $g(k+1) - g(k) = h(k+1) - h(k)$
8) Então $g(k) + (g(k+1) - g(k)) = h(k) + (h(k+1) - h(k))$
9) Então $g(k+1) = h(k+1)$
10) Então $Q(k+1)$
11) Então $Q(k) \to Q(k+1)$ (fecha 2)