1 Definições recursivas

Os livros de matemática e computação “pra adultos” às vezes fazem umas definições ridiculamente curtas para sequências, funções e conjuntos e aí supõem que o leitor vai entender essas definições. O livro da Judith Gersting explica definições recursivas a partir da p.67; vamos ver alguns exemplos extras mais difíceis e alguns truques para entender estas definições.

1.1 Fake binary

Seja $B : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função que obedece estas duas condições:

(BP) $\forall n \in \mathbb{N}. B(2n) = 10 \cdot B(n)$

(BI) $\forall n \in \mathbb{N}. B(2n+1) = B(2n) + 1$

Note que fazendo $n = 0$ em (BP) obtemos que $B(0) = 0$, e com $n = 0$ em (BI) obtemos $B(1) = 1$. Usando $n = 1$, $n - 2$, etc em (BP) e (BI) obtemos $B(2)$, $B(3)$, etc. Exercícios: 1) entenda o padrão da função B; 2) descubra o valor de $B(34)$; mostre os passos necessários para calcular $B(34)$.

1.2 Módulo

Seja $\mathbb{N}^+ = \{\, n \in \mathbb{N} \mid 0 < n \,\}$, e seja $M : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$ a função que obedece estas duas condições:

(MB) Se $0 \leq a < b$ então $M(a, b) = a$,

(MM) $M(a + b, b) = M(a, b)$.

Repare que agora não estamos usando ‘$\forall$’ e nem dizendo em que conjuntos os valores de a e b moram — estamos copiando o que muitos livros de matemática e computação fazem: estamos deixando tudo implícito! Tanto em (MB) quanto em (MM) fica implícito que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}^+$.

Exercícios: 1) Use (MB) para calcular $M(0, 5), M(1, 5), \ldots, M(4, 5)$; 2) Use (MM) para calcular $M(5, 5), M(6, 5), \ldots$; 3) Use (MM) para calcular $M(-1, 5), M(-2, 5), \ldots$.

1.3 Noves

Seja $D : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função que obedece estas três condições:

(DZ) $D(0) = 0$

(DP) Se $D(n) = n$ então $D(n + 1) = 10D(n) + 9$

(DC) Se $D(n) \neq n$ então $D(n + 1) = D(n)$

Exercícios: 1) Calcule $D(0), D(1), \ldots, D(11)$. 2) Entenda o padrão e descubra os valores de $D(99), D(100), D(101), \ldots, D(999), D(1000), D(1001)$.

1.4 Concatenação de números

Seja $C : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função que obedece:

(CD) $C(a, b) = a \cdot (D(b) + 1) + b$

Exercícios: 1) Calcule $C(12, 345)$; 2) Calcule $C(12, 0)$; 3) Calcule $C(0, 12)$.

1.5 Um conjunto de números

Seja $S \subseteq \mathbb{N}$ o conjuntos que obedece:
(S0) $0 \in S$,
(S2) Se $n \in S$ então $10n + 2 \in S$,
(S3) Se $n \in S$ então $10n + 3 \in S$.
Exercícios: 1) Prove que $23322 \in S$; 2) Explique porque não dá pra provar que $45 \in S$.

1.6 Strings

O "Exemplo 23" na página 70 do livro da Judith define *strings*, que às vezes são chamados de *sequências de caracteres* ou de *cadeias de caracteres* — ou só *cadeias* — em português. Alguns exemplos de strings: "`Hello`", "`1+2`", "", "`)+`". Vamos usar '..' (como em Lua) para a operação de concatenação de strings. Exemplos:
"`Hello`".."`1+2`" = "`Hello1+2`"
"".."`)+`" = "`)+`"

1.7 Um conjunto de expressões

Digamos que os conjuntos de strings $\mathsf{E_D}$, $\mathsf{E_N}$ e $\mathsf{E_S}$ obedecem:
(ED) "`0`", "`1`", . . . , "`9`" $\in \mathsf{E_D}$
(EN1) Se $d \in \mathsf{E_D}$ então $d \in \mathsf{E_N}$
(EN2) Se $n \in \mathsf{E_N}$ e $d \in \mathsf{E_D}$ então $n..d \in \mathsf{E_N}$
(ES1) Se $n \in \mathsf{E_N}$ então $n \in \mathsf{E_S}$
(ES2) Se $s, t \in \mathsf{E_S}$ então s.."`+`"..$t \in \mathsf{E_S}$
(ESP) Se $s \in \mathsf{E_S}$ então "`(`"..s.."`)`" $\in \mathsf{E_N}$
Exercícios: 1) Prove que "`123`" $\in \mathsf{E_N}$; 2) Prove que "`123`" $\in \mathsf{E_S}$ e "`123+4+56`" $\in \mathsf{E_S}$; 3) Prove que "`(123+4+56)`" $\in \mathsf{E_N}$; 4) Prove que "`(123+4+56)`" $\in \mathsf{E_S}$; 5) Prove que "`(123+4+56)+78`" $\in \mathsf{E_S}$.

1.8 Outro conjunto de expressões

Vamos *reusar* os símbolos $\mathsf{E_D}$, $\mathsf{E_N}$ e $\mathsf{E_S}$ do item anterior — com outro significado.
Digamos que os conjuntos de strings $\mathsf{E_D}$, $\mathsf{E_N}$, $\mathsf{E_B}$, $\mathsf{E_M}$ e $\mathsf{E_S}$ obedecem:
(ED) "`0`", "`1`", . . . , "`9`" $\in \mathsf{E_D}$
(EN1) $d \in \mathsf{E_N}$
(EN2) $n..d \in \mathsf{E_N}$
(EB1) $n \in \mathsf{E_B}$
(EM1) $b \in \mathsf{E_M}$
(EM2) m.."`*`"..$b \in \mathsf{E_M}$
(ES1) $m \in \mathsf{E_S}$
(ES2) s.."`+`"..$m \in \mathsf{E_S}$
(EBP) "`(`"..s.."`)`" $\in \mathsf{E_B}$

Agora estamos usando uma convenção no nome das variáveis para deixar a especificação mais curta. A convenção é:

$d, d', d'' \in \mathsf{E_D}$
$n, n', n'' \in \mathsf{E_N}$
$b, b', b'' \in \mathsf{E_B}$
$m, m', m'' \in \mathsf{E_M}$
$s, s', s'' \in \mathsf{E_S}$

e os '$\forall$'s ficam implícitos. Por exemplo, (EM2) por extenso é:

$\forall m \in \mathsf{E_M}.\forall b \in \mathsf{E_M}.m..\text{“}\texttt{*}\text{”}..b \in \mathsf{E_M}$.

Exercícios: 1) prove que “`123+4*56+78`” $\in \mathsf{E_S}$; 2) prove que “`(123+4)*56`” $\in \mathsf{E_M}$.

1.9 Valores de expressões

É fácil ver que os conjuntos $\mathsf{E_D}$, $\mathsf{E_N}$, $\mathsf{E_B}$, $\mathsf{E_M}$ e $\mathsf{E_S}$ do item anterior obedecem $\mathsf{E_D} \subset \mathsf{E_N} \subset \mathsf{E_B} \subset \mathsf{E_M} \subset \mathsf{E_S}$. Vamos definir uma função $V : \mathsf{E_S} \to \mathbb{N}$ da seguinte forma:

(VD) $V(\text{“}\texttt{0}\text{”}) = 0, V(\text{“}\texttt{1}\text{”}) = 1, \ldots, V(\text{“}\texttt{9}\text{”}) = 9$
(VN2) $V(n..d) = 10V(n) + V(d)$
(VM2) $V(m..\text{“}\texttt{*}\text{”}..b) = V(m) \cdot V(b)$
(VS2) $V(s..\text{“}\texttt{+}\text{”}..m) = V(s) \cdot V(m)$
(VP) $V(\text{“}\texttt{(}\text{”}..s..\text{“}\texttt{)}\text{”}) = V(s)$