Integração por substituição
(S1), (S2), (S3): substituição na integral definida (mais concreta),
(S1I), (S2I), (S3I): substituição na integral indefinida (mais abstrata).
Os livros costumam começar pela fórmula (SI3), que é a mais abstrata de todas...
Nós vamos seguir um caminho bem diferente, e vamos tratar as fórmulas
(TFC2I), (S1I), (S2I), (S3I) como *abreviações* para as fórmulas
(TFC2), (S1), (S2), (S3).

Fórmulas :

$$\text{(TFC2)} = \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

$$\text{(S1)} = \left(\begin{array}{ccc} f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$\text{(S2)} = \left(\begin{array}{ccc} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$\text{(S3)} = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \right)$$

$$\text{(TFC2I)} = \left(\int F'(x)\,dx = F(x) \right)$$

$$\text{(S1I)} = \left(\begin{array}{ccc} f(g(x)) & = & \int f'(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ f(u) & = & \int f'(u)\,dx \end{array} \right)$$

$$\text{(S2I)} = \left(\begin{array}{ccc} F(g(x)) & = & \int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ F(u) & = & \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$\text{(S3I)} = \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u) \right)(u = g(x))$$

Exercícios:

a) (TFC2) $\left[\begin{smallmatrix} F(x):=-\cos x \\ a:=0 \\ b:=\pi \end{smallmatrix}\right]$

b) (TFC2) $\left[\begin{smallmatrix} F(x):=\cos x \end{smallmatrix}\right]$

c) (TFC2) $\left[\begin{smallmatrix} F(x):=\cos x \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} a:=0 \\ b:=\pi \end{smallmatrix}\right]$

d) (TFC2) $\left[\begin{smallmatrix} F(x):=\cos x \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} a:=\pi \\ b:=2\pi \end{smallmatrix}\right]$

e) (TFC2) $\left[\begin{smallmatrix} F(x):=\frac{1}{2}x^2 \\ a:=0 \\ b:=4 \end{smallmatrix}\right]$

f) (TFC2) $\left[\begin{smallmatrix} F(x):=\frac{1}{3}x^3 \\ a:=0 \\ b:=2 \end{smallmatrix}\right]$

g) $f(g(x))$ $\left[\begin{smallmatrix} f(u):=\operatorname{sen} u \\ g(x):=4x \end{smallmatrix}\right]$

h) $(f'(g(x))g'(x))$ $\left[\begin{smallmatrix} f(u):=\operatorname{sen} u \\ g(x):=4x \end{smallmatrix}\right]$

i) (S1) $\left[\begin{smallmatrix} f(u):=\operatorname{sen} u \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{smallmatrix}\right]$

j) (S2) $\left[\begin{smallmatrix} F(u):=\operatorname{sen} u \\ f(u):=\cos u \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{smallmatrix}\right]$

k) (S2) $\left[\begin{smallmatrix} f(u):=\cos u \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{smallmatrix}\right]$

l) (S2) $\left[\begin{smallmatrix} f(u):=\sqrt{u} \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{smallmatrix}\right]$

m) (S3) $\left[\begin{smallmatrix} f(u):=\sqrt{u} \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{smallmatrix}\right]$

i') (S1I) $\left[\begin{smallmatrix} f(u):=\operatorname{sen} u \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{smallmatrix}\right]$

i") (S1I) $\left[\begin{smallmatrix} f(u):=\operatorname{sen} u \\ g(x):=3x+4 \end{smallmatrix}\right]$

k') (S2I) $\left[\begin{smallmatrix} f(u):=\cos u \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{smallmatrix}\right]$

k") (S2I) $\left[\begin{smallmatrix} f(u):=\cos u \\ g(x):=3x+4 \end{smallmatrix}\right]$

m') (S3I) $\left[\begin{smallmatrix} f(u):=\sqrt{u} \\ g(x):=3x+4 \end{smallmatrix}\right]$

Trabalho sobre áreas de superfícies de revolução
Vale 0.5 pontos na VR ou na VS (que vão ter questões sobre isso),
o que for mais vantajoso pra vocês.

Sejam:
$P(x, y) = (x, y)$,
$C(x, R) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2 \}$.

1) Calcule as distâncias:
a) $d(P(4,2), P(7,2))$
b) $d(P(4,3), P(7,3))$
c) $d(P(4,2), P(4,3))$
d) $d(P(4,3), P(7,2))$

2) Calcule as áreas dos pedaços de cones entre:
a) $C(4,2)$ e $C(7,2)$
b) $C(4,3)$ e $C(7,3)$
c) $C(4,2)$ e $C(4,3)$

3) Represente graficamente os segmentos 1a, 1b, 1c, 1d.

4) Encontre no olhômetro (1d)/(1a), (1d)/(1b), (1d)/(1c).
(Em sala nós chamamos eles de "fatores multiplicadores").

5) Será que os "fatores multiplicadores" que você encontrou na 4 servem para calcular a área do pedaço de cone entre $C(4,3)$ e $C(7,2)$? Não examente, mas vamos fingir que sim... qual *seria* o fator multiplicador
a) de $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4,2), C(7,2))$ para $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4,3), C(7,2))$?
b) de $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4,3), C(7,3))$ para $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4,3), C(7,2))$?
c) de $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4,2), C(4,3))$ para $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4,3), C(7,2))$?

6) Usando os fatores multiplicadores do item anterior calcule:
a) $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4,2), C(7,2))$ (item 2a!) e a partir dela $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4,3), C(7,2))$
b) $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4,3), C(7,3))$ (item 2b!) e a partir dela $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4,3), C(7,2))$
c) $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4,2), C(4,3))$ (item 2c!) e a partir dela $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4,3), C(7,2))$

7) Use uma calculadora pra calcular numericamente os resultados dos itens 6a, 6b, 6c.

8) Agora vamos generalizar o problema 5. Qual é o "fator multiplicador"
a) de $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_0), C(x_1, y_0))$ para $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_0), C(x_1, y_1))$?
b) de $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_1), C(x_1, y_1))$ para $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_0), C(x_1, y_1))$?
c) de $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_0), C(x_0, y_1))$ para $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_0), C(x_1, y_1))$?

9) Use os fatores multiplicadores do item anterior para calcular:
a) $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_0), C(x_1, y_0))$ (item 8a!) e a partir dela $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_0), C(x_1, y_1))$
b) $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_1), C(x_1, y_1))$ (item 8b!) e a partir dela $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_0), C(x_1, y_1))$
c) $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_0), C(x_0, y_1))$ (item 8c!) e a partir dela $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_0), C(x_1, y_1))$

10) Simplifique as respostas dos itens 9a, 9b e 9c usando: $\Delta x = x_1 - x_0$, $\Delta y = y_1 - y_0$, $y_x = \frac{\Delta y}{\Delta y}$.