Cálculo 2 - 2019.1

PDFzão com os todos os
PDFzinhos do semestre
juntados num só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2019.1-C2.html

Integração por substituição
(S1), (S2), (S3): substituição na integral definida (mais concreta),
(S1I), (S2I), (S3I): substituição na integral indefinida (mais abstrata).
Os livros costumam começar pela fórmula (SI3), que é a mais abstrata de todas...
Nós vamos seguir um caminho bem diferente, e vamos tratar as fórmulas
(TFC2I), (S1I), (S2I), (S3I) como *abreviações* para as fórmulas
(TFC2), (S1), (S2), (S3).

Fórmulas :

$$\text{(TFC2)} \;=\; \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \;=\; F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

$$\text{(S1)} \;=\; \begin{pmatrix} f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \\ \Vert & & \\ f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$\text{(S2)} \;=\; \begin{pmatrix} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \Vert & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$\text{(S3)} \;=\; \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \right)$$

$$\text{(TFC2I)} \;=\; \left(\int F'(x)\,dx \;=\; F(x) \right)$$

$$\text{(S1I)} \;=\; \begin{pmatrix} f(g(x)) & = & \displaystyle\int f'(g(x))g'(x)\,dx \\ \Vert & & \\ f(u) & = & \displaystyle\int f'(u)\,dx \end{pmatrix}$$

$$\text{(S2I)} \;=\; \begin{pmatrix} F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \Vert & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$\text{(S3I)} \;=\; \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f(u) \right) (u=g(x))$$

Exercícios:

a) (TFC2) $\begin{bmatrix} F(x):=-\cos x \\ a:=0 \\ b:=\pi \end{bmatrix}$

b) (TFC2) $\begin{bmatrix} F(x):=\cos x \end{bmatrix}$

c) (TFC2) $\begin{bmatrix} F(x):=\cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=\pi \end{bmatrix}$

d) (TFC2) $\begin{bmatrix} F(x):=\cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a:=\pi \\ b:=2\pi \end{bmatrix}$

e) (TFC2) $\begin{bmatrix} F(x):=\frac{1}{2}x^2 \\ a:=0 \\ b:=4 \end{bmatrix}$

f) (TFC2) $\begin{bmatrix} F(x):=\frac{1}{3}x^3 \\ a:=0 \\ b:=2 \end{bmatrix}$

g) $f(g(x))$ $\begin{bmatrix} f(u):=\operatorname{sen} u \\ g(x):=4x \end{bmatrix}$

h) $(f'(g(x))g'(x))$ $\begin{bmatrix} f(u):=\operatorname{sen} u \\ g(x):=4x \end{bmatrix}$

i) (S1) $\begin{bmatrix} f(u):=\operatorname{sen} u \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix}$

j) (S2) $\begin{bmatrix} F(u):=\operatorname{sen} u \\ f(u):=\cos u \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix}$

k) (S2) $\begin{bmatrix} f(u):=\cos u \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix}$

l) (S2) $\begin{bmatrix} f(u):=\sqrt{u} \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix}$

m) (S3) $\begin{bmatrix} f(u):=\sqrt{u} \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix}$

i') (S1I) $\begin{bmatrix} f(u):=\operatorname{sen} u \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix}$

i") (S1I) $\begin{bmatrix} f(u):=\operatorname{sen} u \\ g(x):=3x+4 \end{bmatrix}$

k') (S2I) $\begin{bmatrix} f(u):=\cos u \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix}$

k") (S2I) $\begin{bmatrix} f(u):=\cos u \\ g(x):=3x+4 \end{bmatrix}$

m') (S3I) $\begin{bmatrix} f(u):=\sqrt{u} \\ g(x):=3x+4 \end{bmatrix}$

Trabalho sobre áreas de superfícies de revolução
Vale 0.5 pontos na VR ou na VS (que vão ter questões sobre isso),
o que for mais vantajoso pra vocês.

Sejam:
$P(x, y) = (x, y)$,
$C(x, R) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2 \}$.

1) Calcule as distâncias:
a) $d(P(4, 2), P(7, 2))$
b) $d(P(4, 3), P(7, 3))$
c) $d(P(4, 2), P(4, 3))$
d) $d(P(4, 3), P(7, 2))$

2) Calcule as áreas dos pedaços de cones entre:
a) $C(4, 2)$ e $C(7, 2)$
b) $C(4, 3)$ e $C(7, 3)$
c) $C(4, 2)$ e $C(4, 3)$

3) Represente graficamente os segmentos 1a, 1b, 1c, 1d.

4) Encontre no olhômetro (1d)/(1a), (1d)/(1b), (1d)/(1c).
(Em sala nós chamamos eles de "fatores multiplicadores").

5) Será que os "fatores multiplicadores" que você encontrou na 4 servem para calcular a área do pedaço de cone entre $C(4, 3)$ e $C(7, 2)$? Não examente, mas vamos fingir que sim... qual *seria* o fator multiplicador
a) de $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4, 2), C(7, 2))$ para $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4, 3), C(7, 2))$?
b) de $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4, 3), C(7, 3))$ para $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4, 3), C(7, 2))$?
c) de $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4, 2), C(4, 3))$ para $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4, 3), C(7, 2))$?

6) Usando os fatores multiplicadores do item anterior calcule:
a) $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4, 2), C(7, 2))$ (item 2a!) e a partir dela $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4, 3), C(7, 2))$
b) $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4, 3), C(7, 3))$ (item 2b!) e a partir dela $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4, 3), C(7, 2))$
c) $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4, 2), C(4, 3))$ (item 2c!) e a partir dela $\mathsf{ÁreaEntre}(C(4, 3), C(7, 2))$

7) Use uma calculadora pra calcular numericamente os resultados dos itens 6a, 6b, 6c.

8) Agora vamos generalizar o problema 5. Qual é o "fator multiplicador"
a) de $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_0), C(x_1, y_0))$ para $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_0), C(x_1, y_1))$?
b) de $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_1), C(x_1, y_1))$ para $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_0), C(x_1, y_1))$?
c) de $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_0), C(x_0, y_1))$ para $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_0), C(x_1, y_1))$?

9) Use os fatores multiplicadores do item anterior para calcular:
a) $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_0), C(x_1, y_0))$ (item 8a!) e a partir dela $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_0), C(x_1, y_1))$
b) $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_1), C(x_1, y_1))$ (item 8b!) e a partir dela $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_0), C(x_1, y_1))$
c) $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_0), C(x_0, y_1))$ (item 8c!) e a partir dela $\mathsf{ÁreaEntre}(C(x_0, y_0), C(x_1, y_1))$

10) Simplifique as respostas dos itens 9a, 9b e 9c usando: $\Delta x = x_1 - x_0$, $\Delta y = y_1 - y_0$, $y_x = \frac{\Delta y}{\Delta y}$.

Cálculo 2
PURO-UFF - 2019.1
P1 - 5/junho/2019 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 2.5)** Calcule

$$\int (\operatorname{sen} 3x)^2 (\cos 4x)^2 \, dx.$$

2) **(Total: 2.5)** Calcule

$$\int x \ \ln(2x+3) \, dx.$$

3) **(Total: 2.5)** Calcule

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-9x^2}} \, dx.$$

4) **(Total: 2.5)** Calcule

$$\int \frac{x^3}{x^2+8x+12} \, dx.$$

Algumas definições, fórmulas e substituições:

$$\begin{array}{llll}
c = \cos\theta & c^2+s^2=1 & \frac{ds}{d\theta}=c & E=c+is \\
s = \operatorname{sen}\theta & z^2=t^2+1 & \frac{dc}{d\theta}=-s & c=\frac{E+E^{-1}}{2} \\
t = \tan\theta & \sqrt{1-s^2}=c & \frac{dt}{d\theta}=z^2 & s=\frac{E-E^{-1}}{2i} \\
z = \sec\theta & \sqrt{t^2+1}=z & \frac{dz}{d\theta}=zt & e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}=2\cos k\theta \\
E = e^{i\theta} & \sqrt{z^2-1}=t & & e^{ik\theta}-e^{-ik\theta}=2i\operatorname{sen} k\theta
\end{array}$$

Gabarito

Cálculo 2
PURO-UFF - 2019.1
P2 - 5/julho/2019 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) (Total: 2.0) Seja $(*)$ a seguinte EDO: $f'' + 8f' - 20f = 0$.
a) (0.5 pts) Expresse $(*)$ na forma $(D - a)(D - b)f = 0$.
b) (0.5 pts) Encontre as soluções básicas de $(*)$.
c) (1.0 pts) Encontre uma solução de $(*)$ que obedeça $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

2) (Total: 2.0) Seja $(**)$ a seguinte EDO: $f'' + 8f' + 25f = 0$.
a) (0.5 pts) Expresse $(**)$ na forma $(D - \alpha)(D - \overline{\alpha})f = 0$.
b) (0.5 pts) Encontre as soluções básicas de $(**)$.
c) (1.0 pts) Encontre as soluções básicas reais de $(**)$.

3) (Total: 2.0) Seja $(***)$ a seguinte EDO: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3}{(y+4)^5}$.
a) (0.5 pts) Encontre a solução geral de $(***)$ por variáveis separáveis.
b) (0.5 pts) Encontre uma solução de $(***)$ que passa pelo ponto $(6, 7)$.
c) (1.0 pts) Teste a sua solução geral.

4) (Total: 2.0) Seja $F(x, y) = (x + 2)^3(y^4 + 5)$ e seja $Mdx + Ndy = 0$ a EDO exata cujas soluções são as curvas de nível da F.
a) (0.5 pts) Diga quem são M e N.
b) (0.5 pts) Verifique que a sua EDO $Mdx + Ndy = 0$ é exata.
c) (0.5 pts) Encontre a solução geral da sua EDO $Mdx + Ndy = 0$.
d) (0.5 pts) Encontre uma solução dessa EDO que passa pelo ponto $(6, 7)$.

5) (Total: 2.0) Sejam $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$.
a) (0.2 pts) Represente graficamente a área entre f e g.
b) (0.3 pts) Represente graficamente a área entre f e g em $\frac{\pi}{4} \leq x \leq 2\pi$.
c) (1.5 pts) Calcule a área entre f e g em $\frac{\pi}{4} \leq x \leq 2\pi$.

Cálculo 2
PURO-UFF - 2019.1
VR - 10/julho/2019 - Eduardo Ochs
Versão para quem perdeu a P1.
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 2.5)** Calcule:

$$\int \frac{x^3+4}{x^2-x-20}\,dx$$

2) **(Total: 5.0)** Seja $f(x)=\sqrt{9-4x^2}$.
a) **(0.5 pts)** Para que valores de x temos $f(x)=0$?
b) **(1.5 pts)** Calcule $\int f(x)\,dx$ por substituição trigonométrica.
c) **(1.5 pts)** Calcule $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$, onde a e b são as suas respostas para o item (a).
d) **(0.5 pts)** Faça o gráfico de $f(x)$.
e) **(0.5 pts)** Represente graficamente $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$.
f) **(0.5 pts)** Dá pra calcular a área da figura do item anterior por um segundo método, sem usar integral. Explique como e calcule a área por este outro método.

3) **(Total: 2.5)** Calcule:

$$\int (\operatorname{sen} x)^6\,dx$$

Cálculo 2
PURO-UFF - 2019.1
VR - 10/julho/2019 - Eduardo Ochs
Versão para quem perdeu a P2.
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 5.0)** Seja $s(x) = \operatorname{sen} x$ e $r(x)$ a reta que passa pelos pontos $(0,1)$ e $(\frac{3}{2}\pi, 0)$.
a) **(0.5 pts)** Dê a equação da reta r.
b) **(1.0 pts)** Represente graficamente as curvas s e r e a área entre elas.
c) **(1.5 pts)** Marque no gráfico do item anterior TODOS os pontos de interseção entre s e r. Quantos eles são? Chame-os de $P_1 = (x_1, y_1), \ldots, P_n = (x_n, y_n)$. Dê as coordenadas exatas dos pontos para os quais isto é possível, e dê aproximações olhométricas para as coordenadas dos outros pontos.
d) **(2.0 pts)** Dê uma fórmula para calcular a área entre $s(x)$ e $r(x)$ entre $x = 0$ e $x = \frac{3}{2}\pi$. A sua resposta não pode usar a função módulo mas pode ser uma fórmula que depende do valor de x_2.

2) **(Total: 5.0)** Considere estas três EDOs (equivalentes!):

$$(*) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x^4}{y^5}$$

$$(**) \qquad x^4\,dx = y^5\,dy$$

$$(***) \qquad x^{14}\,dx = x^{10}y^5\,dy$$

a) **(1.5 pts)** Resolva $(*)$ usando variáveis separáveis e dê a solução geral dela.
b) **(1.5 pts)** Mostra que $(**)$ é exata e $(***)$ não é.
c) **(1.5 pts)** Resolva $(**)$ usando a técnica para EDOs exatas.
d) **(0.5 pts)** Encontre a solução de $(*)$ que passa pelo ponto $(-6, -7)$.

Cálculo 2
PURO-UFF - 2019.1
VS - 12/julho/2019 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 1.0)** Calcule
$$\int_{x=0}^{x=4} |x^2-1|\,dx.$$

2) **(Total: 2.0)** Calcule
$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

3) **(Total: 2.0)** Calcule
$$\int (x+2)\sqrt{x+3}\,dx.$$

4) **(Total: 1.0)** Teste a sua solução da questão 2.

5) **(Total: 1.0)** Qual é a solução geral da EDO $f'(x)=(x+2)\sqrt{x+3}$?
Teste a sua resposta.

6) **(Total: 3.0)** Seja $(*)$ esta EDO: $f'(x)=\frac{x}{x-2}e^{3f(x)}$.
a) **(1.0 pts)** Encontre a solução geral de $(*)$.
b) **(1.0 pts)** Teste a sua solução.
c) **(1.0 pts)** Encontre a solução que passa pelo ponto $(4,5)$.