

Cálculo 2 - 2019.1

PDFzão com os todos os
PDFzinhos do semestre
juntados num só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
<http://angg.twu.net/2019.1-C3.html>

Quadro da aula de C3 de 16/maio/2019
Eduardo Ochs, PURO/UFF
Versão: 2019May22 19:34

No final da aula passada nós revimos uma fórmula para aproximação de primeira ordem...

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x_0 + a) &\cong f(x_0) + af'(x_0) \\ f(x) &\cong f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \\ &= (f(x_0) - x_0f'(x_0)) + xf'(x_0) \end{aligned}$$

As três são equivalentes.

Às vezes alguma delas é mais conveniente que as outras.

Na aula passada eu pedi pra vocês encontrarem fórmulas como (1), (2), (3) para funções $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — e que vocês experimentassem usar notações que vocês aprenderam no vídeo — em especial “ $\vec{\nabla}$ ”...

A notação mais adequada faz as contas ficarem mais claras e mais curtas.

Hoje:

Aproximações de segunda ordem!

Lembre que:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial}{\partial x} F \\ F_y &= \frac{\partial}{\partial y} F \\ F_{xy} &= (F_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} F \right) \end{aligned}$$

Exercícios:

Seja $F(x, y) = x^2y^3$.

1) Calcule:

- | | |
|-------------------|--------------------|
| a) $F(3, 4)$ | b') $F_x(3, 4)$ |
| b) $F_x(x, y)$ | c') $F_y(3, 4)$ |
| c) $F_y(x, y)$ | d') $F_{xx}(3, 4)$ |
| d) $F_{xx}(x, y)$ | e') $F_{xy}(3, 4)$ |
| e) $F_{xy}(x, y)$ | f') $F_{yx}(3, 4)$ |
| f) $F_{yx}(x, y)$ | g') $F_{yy}(3, 4)$ |
| g) $F_{yy}(x, y)$ | |

2) Encontre uma função $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que seja uma aproximação de primeira ordem para F no ponto $(3, 4)$.

3) Seja $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave qualquer. Encontre uma aproximação de primeira ordem para a H no ponto $(3, 4)$.

4) Seja $\vec{u} = (a, b)$. Encontre uma aproximação de primeira ordem para:

- $F((3, 4) + t\vec{(5, 6)})$
- $G((3, 4) + t\vec{(5, 6)})$
- $H((x_0, y_0) + t\vec{u})$

O grande tema da aula de hoje é: o que a aproximação de segunda ordem para $H((x_0, y_0) + t\vec{u})$ “enxerga”? Isto é: quais das derivadas parciais de H importam para o resultado?

Trabalho pra casa, valendo 1.0 ponto na

P1:

Façam os exercícios de hoje pra entregar.

Ordem sugerida (do mais fácil pro mais difícil): (2), (Da), (3), (4a), (4b), (4c), (Db), (Dc).

Dica:

O problema (d) da aula passada era:

(d) Seja $F(x, y) = \sin x + \sin y$. Use $F(\frac{\pi}{2}, \pi)$ e $\vec{\nabla} F(\frac{\pi}{2}, \pi)$ pra calcular uma aproximação para $F(\frac{\pi}{2} + 0.1, \pi + 0.2)$.

Nesse problema é bem fácil distinguir o ponto onde sabemos calcular tudo sem calculadora — $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, \pi)$ — da “variação” deste ponto:

$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi \right) + \vec{(0.1, 0.2)} = \left(\frac{\pi}{2} + 0.1, \pi + 0.2 \right)$$

Se você estiver se enrolando nos problemas de hoje tente fazer os exercícios abaixo usando $F(x, y) = \sin x + \sin y$ (obs: vamos chamar isto de “**Exercício D**”):

- Encontrar uma aproximação de primeira ordem para $F(\frac{\pi}{2}, \pi) + t\vec{(0.1, 0.2)}$,
- Encontrar uma aproximação de segunda ordem para $F(\frac{\pi}{2}, \pi) + t\vec{(0.1, 0.2)}$,
- Encontrar uma aproximação de segunda ordem para $F(\frac{\pi}{2}, \pi) + t\vec{(a, b)}$.

Itens extras que eu não pus no quadro:

Seja $S = \{ (x, y, F(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$.

d) Visualize as superfície S ao redor do ponto $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e tente representá-la graficamente.

e) Represente graficamente a aproximação que você montou no exercício (Da).

f) Idem para o exercício (Db).

g) Idem para o exercício (Dc), com $\vec{(a, b)} = \vec{(1, 0)}$.

h) Idem para o exercício (Dc), com $\vec{(a, b)} = \vec{(0, 1)}$.

i) Idem para o exercício (Dc), com $\vec{(a, b)} = \vec{(1, 1)}$.

Mais dicas:

O exercício (d) da aula passada pedia pra calcular uma aproximação para $F(\frac{\pi}{2} + 0.1, \pi + 0.2)$ e *implicitamente* pedia pra vocês compararem o resultado disso com $\text{sen}(\pi 2 + 0.1) + \text{sen}(\pi + 0.2)$, que dá pra calcular com calculadora...

Você pode dar *nomes* para as suas expressões — por exemplo, $E = \text{sen}(\pi 2 + 0.1) + \text{sen}(\pi + 0.2)$ (valor exato) e $A = \dots$ (valor aproximado), calcular ambas numericamente e comparar os resultados.

(Re)leia os exemplos 2.2.2, 2.2.4 e 2.2.5 do APEX Calculus.

O exemplo mais comum de aproximação linear — vários livros começam por ele — é $f(x) = \sqrt{x}$ em torno de $x_0 = 4$. Faça a figura para este exemplo, encontre uma fórmula para a aproximação de primeira ordem em $x_0 = 4$, e use uma calculadora para comparar o resultado exato e o resultado da aproximação em $x = 4$, $x = 5$, $x = 4.1$, $x = 3.9$ e $x = 1$.

Obtenha uma aproximação de *segunda* ordem para esta $f(x)$ em $x_0 = 4$. Teste-a em $x = 4$, $x = 5$, $x = 4.1$, $x = 3.9$ e $x = 1$.

Leia a seção 4.4 do APEX Calculus.

Relembre a notação de substituição que usamos na aula de 3/maio. Exemplos:

$$(F(g(t), h(t))) \begin{bmatrix} F(x,y):=x/y \\ g(t):=\text{sen } t \\ h(t):=\text{cos } t \end{bmatrix} = \frac{\text{sen } t}{\text{cos } t}$$
$$(F(g(t), h(t))) \begin{bmatrix} F(x,y):=x/y \\ g(t):=\text{sen } t \\ h(t):=\text{cos } t \end{bmatrix} [t:=\pi] = \frac{\text{sen } \pi}{\text{cos } \pi}$$

Use-a pra escrever como você está testando as suas fórmulas. Se você escrever claramente fica bem mais fácil discutir com colegas!

Mais uma dica/exercício (“Exercício 5”, acrescentado em 22/maio):

- Calcule $\frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}f(g(x)))$.
- Calcule $\frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}F(g(t), h(t)))$.

Quando eu dava Geometria Analítica eu sempre distribuía no início do curso uma texto com dicas de como estudar. Uma das dicas era:

7) Uma solução bem escrita pode incluir, além do resultado final, contas, definições, representações gráficas, explicações em português, testes, etc. Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar. Você pode testar se uma solução sua está bem escrita submetendo-a às seguinte pessoas: a) você mesmo logo depois de você

escrevê-la — releia-a e veja se ela está clara; b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu; c) um colega que seja seu amigo; d) um colega que seja menos seu amigo que o outro; e) o monitor ou o professor. Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal. *GA é um curso de escrita matemática*: se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite — reescrever é um ótimo exercício.

Cálculo 3
 PURO-UFF - 2019.1
 P1 - 31/maio/2019 - Eduardo Ochs
 Respostas sem justificativas não serão aceitas.
 Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

- 1) **(Total: 2.0)** Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $x_0 = 4$.
- (0.3 pts)** Encontre uma aproximação de 1ª ordem para f em torno de x_0 .
 - (0.7 pts)** Encontre uma aproximação de 2ª ordem para f em torno de x_0 .
 - (1.0 pts)** Represente graficamente as três funções.
- 2) **(Total: 3.0)** Seja $F(x, y) = 2 + 3x + 4x^2 + 5xy + 6x^3 + 7x^2y + 8x^3$.
- (1.0 pts)** Seja $G(x, y)$ uma aproximação 1ª ordem para F em torno do ponto $(x_0, y_0) = (10, 10)$. Dê a equação de G .
 - (1.0 pts)** Seja $H(x, y)$ uma aproximação 2ª ordem para F em torno do ponto $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Dê a equação de H .
 - (1.0 pts)** Seja $M(x, y) = F(x, y) - H(x, y)$. Dê a equação de M e calcule M , M_x , M_y , M_{xx} , M_{xy} , M_{yy} no ponto $(0, 0)$.
- 3) **(Total: 4.0)** Sejam $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $g(t) = (t, 0)$, $h(t) = (t + \cos t, \sin t)$.
- (1.0 pts)** Calcule $h(t)$, $h'(t)$ e $h''(t)$ no caso geral e para $t = k\frac{\pi}{2}$ para $k = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.
 - (1.0 pts)** Use os resultados do item anterior para fazer um esboço da trajetória $h(t)$.
 - (1.0 pts)** Encontre um valor de t para o qual $h'(t) = 0$.
 - (1.0 pts)** Seja t_0 o valor de t que você encontrou no item anterior. Obtenha uma aproximação de segunda ordem para a função h em torno de t_0 e use-a para calcular aproximações para $h(t_0 + 0.1)$ e $h(t_0 - 0.1)$.
- 4) **(Total: 1.0)** Calcule as derivadas parciais de 1ª e 2ª ordem de:
- (0.5 pts)** $e^2 \sin(xy)$,
 - (0.5 pts)** $(x - y)/(x + y)$.

Gabarito (MUITO incompleto)

$$1) f(x) = x^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$$

$$f(4) = 2$$

$$f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$f''(4) = -\frac{1}{32}$$

$$1a) g(x_0 + \epsilon) = f(x_0) + \epsilon f'(x_0)$$

$$g(4 + \epsilon) = f(4) + \epsilon f'(4) = 2 + \frac{1}{4}\epsilon$$

$$1b) h(x_0 + \epsilon) = f(x_0) + \epsilon f'(x_0) + \frac{1}{2}\epsilon^2 f''(x_0)$$

$$h(4 + \epsilon) = f(4) + \epsilon f'(4) + \frac{1}{2}\epsilon^2 f''(4)$$

$$= 2 + \frac{1}{4}\epsilon + -\frac{1}{64}\epsilon^2$$

Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.1
P2 - 4/julho/2019 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) (**Total: 3.0**) Seja $F(x, y) = xy$ e sejam

$$\begin{aligned} A &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x + y < 1 \}, \\ B &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 1 \}, \\ C &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, 1 \leq x + y \}. \end{aligned}$$

- a) (**1.0 pts**) Represente graficamente o conjunto A e diga se dá pra usar o teorema de Weierstrass pra garantir que F tem um máximo e um mínimo globais no conjunto A .
- b) (**1.0 pts**) Idem, mas para o conjunto B .
- c) (**1.0 pts**) Idem, mas para o conjunto C .

- 2) (**Total: 2.0**) Seja $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$.
- a) (**0.6 pts**) Represente graficamente A .
- b) (**0.8 pts**) Explique porque $0 \in \text{Fr}(A)$.
- c) (**0.6 pts**) Explique porque A não é fechado.

(Oops! Redigitar a questão 3...)

Cálculo 3
 PURO-UFF - 2019.1
 VR - 5/julho/2019 - Eduardo Ochs
 Versão para quem perdeu a P1.
 Respostas sem justificativas não serão aceitas.
 Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 3.0)** Calcule as derivadas de primeira e segunda ordem de cada uma das funções abaixo:

a) **(1.0 pts)** $F(x, y) = e^x \ln(x + 2y)$

b) **(1.0 pts)** $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) **(1.0 pts)** $F(x, y) = G(x, y)/h(x)$

2) **(Total: 3.5)** Seja $f(x) = \sqrt{x}$.

a) **(0.5 pts)** Dê uma aproximação de primeira ordem para $f(x)$ em torno de $x_0 = 1$.

b) **(1.0 pts)** Dê uma aproximação de segunda ordem para $f(x)$ em torno de $x_0 = 1$.

c) **(1.0 pts)** Use o item (a) para calcular um valor aproximado para $\sqrt{1.01}$.

d) **(1.0 pts)** Use o item (b) para calcular um valor aproximado para $\sqrt{1.01}$.

3) **(Total: 3.5)** Seja $f(x) = \sin(x)$.

a) **(0.5 pts)** Calcule $f(x)$ e $f'(x)$ para $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$, \dots , $x = 2\pi$.

b) **(1.5 pts)** Use os resultados do item anterior para fazer uma representação gráfica *muito boa* do gráfico da f entre $x = 0$ e $x = \pi$. Dicas: faça um quadriculado com 4cm por unidade, e use $\pi \approx 3$ e $\sqrt{2} \approx 1.5$.

c) **(1.5 pts)** Seja $g(x)$ uma reta tangente a $f(x)$ em $x = 2.5$. Represente g graficamente, e a partir de seu desenho obtenha boas aproximações para o a e o b da equação cartesiana de g : $g(x) = ax + b$.

Cálculo 3
 PURO-UFF - 2019.1
 VR - 5/julho/2019 - Eduardo Ochs
 Versão para quem perdeu a P2.
 Respostas sem justificativas não serão aceitas.
 Diagramas ambíguos serão interpretados errado.
 A pontuação de cada subitem depende da dificuldade dele.
 Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

Sejam:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x \leq \frac{1}{y} \}, \\
 C_2 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq \frac{1}{2}, y \geq \frac{1}{3}, x \leq \frac{1}{y} \}, \\
 C_3 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 2, y \geq 3, x \leq \frac{1}{y} \}, \\
 C_4 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(x, y) = 4 \}, \\
 C_5 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < \max(x, y) \leq 4 \}, \\
 C_6 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq \min(x, y) \leq 4 \}, \\
 C_7 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq \min(x, y) \leq 4, x + y \leq 7 \}, \\
 f(x) &= \begin{cases} 2 - x & \text{quando } x < 1 \\ 4 - x & \text{quando } 1 \leq x < 4 \\ -4 + x & \text{quando } 4 \leq x \end{cases} .
 \end{aligned}$$

1) (**Total: 2.5**) Represente graficamente cada um dos conjuntos C_1, \dots, C_7 .

2) (**Total: 2.0**) Para cada um dos conjuntos C_1, \dots, C_7 diga se ele é aberto, fechado, limitado, ou compacto. Monte uma tabela com as suas respostas. *Não chute*: cada resposta errada cancela duas certas.

3) (**Total: 1.5**) Sejam $A = [0.5, 1.5]$, $B = f^{-1}(A)$, $C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in B, y = f(x) \}$.

Represente graficamente f , A , B , C , $\text{Fr}(B)$, $\text{Fr}(C)$.

4) (**Total: 1.5**) Sejam $A = (0.5, 1.5)$, $B = f^{-1}(A)$, $C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in B, y = f(x) \}$.

Represente graficamente f , A , B , C , $\text{Fr}(B)$, $\text{Fr}(C)$.

5) (**Total: 2.5**) Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. É possível usar o Teorema de Weistrass para garantir que ela tem máximo global e mínimo global no conjunto C_1 ? E nos conjuntos C_2, C_3, \dots, C_7 ? **Dica**: o caso C_3 não é nada óbvio, teste as suas idéias sobre ele com uma função bem simples como por exemplo $F(x, y) = x$.

Cálculo 3
 PURO-UFF - 2019.1
 VR - 5/julho/2019 - Eduardo Ochs
 Versão para quem perdeu a P2.
 Respostas sem justificativas não serão aceitas.
 Diagramas ambíguos serão interpretados errado.
 A pontuação de cada subitem depende da dificuldade dele.
 Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

- 1) **(Total: 6.0)** Seja $F(x, y) = (x + y)^2$.
- (0.5 pts)** Represente graficamente o conjunto $F^{-1}(0)$.
 - (0.5 pts)** Represente graficamente o conjunto $F^{-1}(1)$.
 - (0.5 pts)** Represente graficamente o conjunto $F^{-1}(4)$.
 - (1.0 pts)** Represente graficamente o gradiente $\vec{\nabla} F$ nos pontos (x, y) em que $x, y \in \{0, 1, 2\}$.
 - (1.5 pts)** Dê a equação do plano tangente à superfície $z = F(x, y)$ em $(x, y) = (1, 2)$.
 - (2.0 pts)** Digamos que o plano tangente do item anterior seja $z = g(x, y)$. Represente graficamente $g^{-1}(F(1, 2))$ e $g^{-1}(0)$.

- 1) **(Total: 3.0)** Seja $F(x, y) = xy$ e sejam

$$\begin{aligned} C_1 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (0, 3)) \leq 2, x \leq 0 \}, \\ C_2 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (0, 3)) \leq 2, x > 0 \}, \\ C_3 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (0, 3)) < 2, x \geq 0 \}, \\ C_4 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (0, 3)) \geq 2, x \geq 0 \}. \end{aligned}$$

- (1.0 pts)** Represente graficamente os conjuntos C_1 , C_2 , C_3 e C_4 .
- (1.0 pts)** Diga quais deles são abertos, quais são fechados, e quais são limitados. Não chute!!!
- (2.0 pts)** Faça um esboço das curvas de nível da função F no conjunto C_3 (dica: se você não conseguir fazer isso direto comece fazendo um esboço das curvas de nível da F em \mathbb{R}^2 !). Mostre onde F assume valores mais altos e mais baixos e por que é que F não tem um máximo global no conjunto C_3 .