Cálculo 2 - 2019.1

PDFzão com os todos os
PDFzinhos do semestre
juntados num só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2019.1-C3.html

Quadro da aula de C3 de 16/maio/2019
Eduardo Ochs, PURO/UFF
Versão: 2019May22 19:34

No final da aula passada nós revimos uma fórmula para aproximação de primeira ordem...

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} f(x_0+a) & \cong & f(x_0) + af'(x_0) \\ f(x) & \cong & f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) \\ & = & (f(x_0) + -x_0 f'(x_0)) + xf'(x_0) \end{array}$$

As três são equivalentes.

Às vezes alguma delas é mais conveniente que as outras.

Na aula passada eu pedi pra vocês encontrarem fórmulas como (1), (2), (3) para funções $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — e que vocês experimentassem usar notações que vocês aprenderam no vídeo — em especial "$\overrightarrow{\nabla}$"...

A notação mais adequada faz as contas ficarem mais claras e mais curtas.

Hoje:
Aproximações de segunda ordem!

Lembre que:
$F_x = \frac{\partial}{\partial x} F$
$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F$
$F_{xy} = (F_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x} F)$

Exercícios:
Seja $F(x,y) = x^2 y^3$.

1) Calcule:

a)	$F(3,4)$		
b)	$F_x(x,y)$	b')	$F_x(3,4)$
c)	$F_y(x,y)$	c')	$F_y(3,4)$
d)	$F_{xx}(x,y)$	d')	$F_{xx}(3,4)$
e)	$F_{xy}(x,y)$	e')	$F_{xy}(3,4)$
f)	$F_{yx}(x,y)$	f')	$F_{yx}(3,4)$
g)	$F_{yy}(x,y)$	g')	$F_{yy}(3,4)$

2) Encontre uma função $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que seja uma aproximação de primeira ordem para F no ponto $(3,4)$.

3) Seja $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função suave qualquer. Encontre uma aproximação de primeira ordem para a H no ponto $(3,4)$.

4) Seja $\vec{u} = \overrightarrow{(a,b)}$. Encontre uma aproximação de primeira ordem para:

a) $F((3,4) + t\overrightarrow{(5,6)})$
b) $G((3,4) + t\overrightarrow{(5,6)})$
c) $H((x_0,y_0) + t\vec{u})$

O grande tema da aula de hoje é: o que a aproximação de segunda ordem para $H((x_0,y_0) + t\vec{u})$ "enxerga"? Isto é: quais das derivadas parciais de H importam para o resultado?

Trabalho pra casa, valendo 1.0 ponto na P1:

Façam os exercícios de hoje pra entregar.

Ordem sugerida (do mais fácil pro mais difícil): (2), (Da), (3), (4a), (4b), (4c), (Db), (Dc).

Dica:

O problema (d) da aula passada era:

(d) Seja $F(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$. Use $F(\frac{\pi}{2}, \pi)$ e $\overrightarrow{\nabla} F(\frac{\pi}{2}, \pi)$ pra calcular uma aproximação para $F(\frac{\pi}{2} + 0.1, \pi + 0.2)$.

Nesse problema é bem fácil distinguir o ponto onde sabemos calcular tudo sem calculadors — $(x_0,y_0) = (\frac{\pi}{2}, \pi)$ — da "variação" deste ponto: $(\frac{\pi}{2}, \pi) + \overrightarrow{(0.1, 0.2)} = (\frac{\pi}{2} + 0.1, \pi + 0.2)$

Se você estiver se enrolando nos problemas de hoje tente fazer os exercícios abaixo usando $F(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$ (obs: vamos chamar isto de "**Exercício D**"):

a) Encontrar uma aproximação de primeira ordem para $F((\frac{\pi}{2}, \pi) + t\overrightarrow{(0.1, 0.2)})$,

b) Encontrar uma aproximação de *segunda* ordem para $F((\frac{\pi}{2}, \pi) + t\overrightarrow{(0.1, 0.2)})$,

c) Encontrar uma aproximação de *segunda* ordem para $F((\frac{\pi}{2}, \pi) + t\overrightarrow{(a,b)})$.

Itens extras que eu não pus no quadro:

Seja $S = \{\, (x,y,F(x,y)) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\}$.

d) Visualize as superfície S ao redor do ponto $(x_0,y_0) = (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e tente representá-la graficamente.

e) Represente graficamente a aproximação que você montou no exercício (Da).

f) Idem para o exercício (Db).

g) Idem para o exercício (Dc), com $\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(1,0)}$.

h) Idem para o exercício (Dc), com $\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(0,1)}$.

i) Idem para o exercício (Dc), com $\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(1,1)}$.

Mais dicas:

O exercício (d) da aula passada pedia pra calcular uma aproximação para $F(\frac{\pi}{2}+0.1, \pi+0.2)$ e *implicitamente* pedia pra vocês compararem o resultado disso com $\mathrm{sen}(\pi 2+0.1)+\mathrm{sen}(\pi+0.2)$, que dá pra calcular com calculadora...

Você pode dar *nomes* para as suas expressões — por exemplo, $E = \mathrm{sen}(\pi 2+0.1)+\mathrm{sen}(\pi+0.2)$ (valor exato) e $A = \ldots$ (valor aproximado), calcular ambas numericamente e comparar os resultados.

(Re)leia os exemplos 2.2.2, 2.2.4 e 2.2.5 do APEX Calculus.

O exemplo mais comum de aproximação linear — váááários livros começam por ele — é $f(x) = \sqrt{x}$ em torno de $x_0 = 4$. Faça a figura para este exemplo, encontre uma fórmula para a aproximação de primeira ordem em $x_0 = 4$, e use uma calculadora para comparar o resultado exato e o resultado da aproximação em $x = 4$, $x = 5$, $x = 4.1$, $x = 3.9$ e $x = 1$.

Obtenha uma aproximação de *segunda* ordem para esta $f(x)$ em $x_0 = 4$. Teste-a em $x = 4$, $x = 5$, $x = 4.1$, $x = 3.9$ e $x = 1$.

Leia a seção 4.4 do APEX Calculus.

Relembre a notação de substituição que usamos na aula de 3/maio. Exemplos:

$$(F(g(t),h(t))) \begin{bmatrix} F(x,y):=x/y \\ g(t):=\mathrm{sen}\,t \\ h(t):=\cos t \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{sen}\,t}{\cos t}$$

$$(F(g(t),h(t))) \begin{bmatrix} F(x,y):=x/y \\ g(t):=\mathrm{sen}\,t \\ h(t):=\cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t:=\pi \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{sen}\,\pi}{\cos \pi}$$

Use-a pra escrever como você está testando as suas fórmulas. Se você escrever claramente fica bem mais fácil discutir com colegas!

Mais uma dica/exercício (“Exercício 5”, acrescentado em 22/maio):

a) Calcule $\frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}f(g(x)))$.

b) Calcule $\frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}F(g(t),h(t)))$.

Quando eu dava Geometria Analítica eu sempre distribuía no início do curso uma texto com dicas de como estudar. Uma das dicas era:

> 7) Uma solução bem escrita pode incluir, além do resultado final, contas, definições, representações gráficas, explicações em português, testes, etc. Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar. Você pode testar se uma solução sua está bem escrita submetendo-a às seguinte pessoas: a) você mesmo logo depois de você escrevê-la — releia-a e veja se ela está clara; b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu; c) um colega que seja seu amigo; d) um colega que seja menos seu amigo que o outro; e) o monitor ou o professor. Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal. *GA é um curso de escrita matemática:* se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite — reescrever é um ótimo exercício.

Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.1
P1 - 31/maio/2019 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 2.0)** Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $x_0 = 4$.
a) **(0.3 pts)** Encontre uma aproximação de 1ª ordem para f em torno de x_0.
b) **(0.7 pts)** Encontre uma aproximação de 2ª ordem para f em torno de x_0.
c) **(1.0 pts)** Represente graficamente as três funções.

2) **(Total: 3.0)** Seja $F(x, y) = 2 + 3x + 4x^2 + 5xy + 6x^3 + 7x^2y + 8x^3$.
a) **(1.0 pts)** Seja $G(x, y)$ uma aproximação 1ª ordem para F em torno do ponto $(x_0, y_0) = (10, 10)$. Dê a equação de G.
b) **(1.0 pts)** Seja $H(x, y)$ uma aproximação 2ª ordem para F em torno do ponto $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Dê a equação de H.
c) **(1.0 pts)** Seja $M(x, y) = F(x, y) - H(x, y)$. Dê a equação de M e calcule M, M_x, M_y, M_{xx}, M_{xy}, M_{yy} no ponto $(0, 0)$.

3) **(Total: 4.0)** Sejam $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $g(t) = (t, 0)$, $h(t) = (t + \cos t, \operatorname{sen} t)$.
a) **(1.0 pts)** Calcule $h(t)$, $h'(t)$ e $h''(t)$ no caso geral e para $t = k\frac{\pi}{2}$ para $k = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.
b) **(1.0 pts)** Use os resultados do item anterior para fazer um esboço da trajetória $h(t)$.
c) **(1.0 pts)** Encontre um valor de t para o qual $h'(t) = 0$.
d) **(1.0 pts)** Seja t_0 o valor de t que você encontrou no item anterior. Obtenha uma aproximação de segunda ordem para a função h em torno de t_0 e use-a para calcular aproximações para $h(t_0 + 0.1)$ e $h(t_0 - 0.1)$.

4) **(Total: 1.0)** Calcule as derivadas parciais de 1ª e 2ª ordem de:
a) **(0.5 pts)** $e^2 \operatorname{sen}(xy)$,
b) **(0.5 pts)** $(x - y)/(x + y)$.

Gabarito (MUITO incompleto)
1) $f(x) = x^{1/2}$
$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$
$f''(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$
$f(4) = 2$
$f'(4) = \frac{1}{4}$
$f''(4) = -\frac{1}{32}$
1a) $g(x_0 + \epsilon) = f(x_0) + \epsilon f'(x_0)$
$g(4 + \epsilon) = f(4) + \epsilon f'(4) = 2 + \frac{1}{4}\epsilon$
1b) $h(x_0 + \epsilon) = f(x_0) + \epsilon f'(x_0) + \frac{1}{2}\epsilon^2 f''(x_0)$
$h(4 + \epsilon) = f(4) + \epsilon f'(4) + \frac{1}{2}\epsilon^2 f''(4)$
$= 1 + \frac{1}{4}\epsilon + -\frac{1}{64}\epsilon^2$

Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.1
P2 - 4/julho/2019 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 3.0)** Seja $F(x, y) = xy$ e sejam

$$\begin{aligned} A &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x + y < 1 \}, \\ B &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 1 \}, \\ C &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, 1 \leq x + y \}. \end{aligned}$$

a) **(1.0 pts)** Represente graficamente o conjunto A e diga se dá pra usar o teorema de Weierstrass pra garantir que F tem um máximo e um mínimo globais no conjunto A.
b) **(1.0 pts)** Idem, mas para o conjunto B.
c) **(1.0 pts)** Idem, mas para o conjunto C.

2) **(Total: 2.0)** Seja $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$.
a) **(0.6 pts)** Represente graficamente A.
b) **(0.8 pts)** Explique porque $0 \in \mathsf{Fr}(A)$.
c) **(0.6 pts)** Explique porque A não é fechado.

(Ooops! Redigitar a questão 3...)

Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.1
VR - 5/julho/2019 - Eduardo Ochs
Versão para quem perdeu a P1.
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 3.0)** Calcule as derivadas de primeira e segunda ordem de cada uma das funções abaixo:
a) **(1.0 pts)** $F(x,y) = e^x \ln(x+2y)$
b) **(1.0 pts)** $F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
c) **(1.0 pts)** $F(x,y) = G(x,y)/h(x)$

2) **(Total: 3.5)** Seja $f(x) = \sqrt{x}$.
a) **(0.5 pts)** Dê uma aproximação de primeira ordem para $f(x)$ em torno de $x_0 = 1$.
b) **(1.0 pts)** Dê uma aproximação de segunda ordem para $f(x)$ em torno de $x_0 = 1$.
c) **(1.0 pts)** Use o item (a) para calcular um valor aproximado para $\sqrt{1.01}$.
d) **(1.0 pts)** Use o item (b) para calcular um valor aproximado para $\sqrt{1.01}$.

3) **(Total: 3.5)** Seja $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.
a) **(0.5 pts)** Calcule $f(x)$ e $f'(x)$ para $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $\ldots$, $x = 2\pi$.
b) **(1.5 pts)** Use os resultados do item anterior para fazer uma representação gráfica *muito boa* do gráfico da f entre $x = 0$ e $x = \pi$. Dicas: faça um quadriculado com 4cm por unidade, e use $\pi \approx 3$ e $\sqrt{2} \approx 1.5$.
c) **(1.5 pts)** Seja $g(x)$ uma reta tangente a $f(x)$ em $x = 2.5$. Represente g graficamente, e a partir de seu desenho obtenha boas aproximações para o a e o b da equação cartesiana de g: $g(x) = ax + b$.

Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.1
VR - 5/julho/2019 - Eduardo Ochs
Versão para quem perdeu a P2.
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Diagramas ambíguos *serão* interpretados errado.
A pontuação de cada subitem depende da dificuldade dele.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

Sejam:
$C_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x \leq \frac{1}{y} \}$,
$C_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq \frac{1}{2}, y \geq \frac{1}{3}, x \leq \frac{1}{y} \}$,
$C_3 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 2, y \geq 3, x \leq \frac{1}{y} \}$,
$C_4 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(x,y) = 4 \}$,
$C_5 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < \max(x,y) \leq 4 \}$.
$C_6 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq \min(x,y) \leq 4 \}$.
$C_7 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq \min(x,y) \leq 4, x+y \leq 7 \}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{quando } x < 1 \\ 4-x & \text{quando } 1 \leq x < 4 \\ -4+x & \text{quando } 4 \leq x \end{cases}.$$

1) **(Total: 2.5)** Represente graficamente cada um dos conjuntos $C_1, \ldots, C_7$.

2) **(Total: 2.0)** Para cada um dos conjuntos $C_1, \ldots, C_7$ diga se ele é aberto, fechado, limitado, ou compacto. Monte uma tabela com as suas respostas. *Não chute:* cada resposta errada cancela duas certas.

3) **(Total: 1.5)** Sejam $A = [0.5, 1.5]$, $B = f^{-1}(A)$, $C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in B, y = f(x) \}$.
Represente graficamente f, A, B, C, $\mathsf{Fr}(B)$, $\mathsf{Fr}(C)$.

4) **(Total: 1.5)** Sejam $A = (0.5, 1.5)$, $B = f^{-1}(A)$, $C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in B, y = f(x) \}$.
Represente graficamente f, A, B, C, $\mathsf{Fr}(B)$, $\mathsf{Fr}(C)$.

5) **(Total: 2.5)** Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua. É possível usar o Teorema de Weistrass para garantir que ela tem máximo global e mínimo global no conjunto C_1? E nos conjuntos $C_2, C_3, \ldots, C_7$? **Dica:** o caso C_3 não é nada óbvio, teste as suas idéia sobre ele com uma função bem simples como por exemplo $F(x,y) = x$.

Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.1
VR - 5/julho/2019 - Eduardo Ochs
Versão para quem perdeu a P2.
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Diagramas ambíguos *serão* interpretados errado.
A pontuação de cada subitem depende da dificuldade dele.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 6.0)** Seja $F(x, y) = (x + y)^2$.
a) **(0.5 pts)** Represente graficamente o conjunto $F^{-1}(0)$.
b) **(0.5 pts)** Represente graficamente o conjunto $F^{-1}(1)$.
c) **(0.5 pts)** Represente graficamente o conjunto $F^{-1}(4)$.
d) **(1.0 pts)** Represente graficamente o gradiente $\overrightarrow{\nabla} F$ nos pontos (x, y) em que $x, y \in \{0, 1, 2\}$.
e) **(1.5 pts)** Dê a equação do plano tangente à superfície $z = F(x, y)$ em $(x, y) = (1, 2)$.
f) **(2.0 pts)** Digamos que o plano tangente do item anterior seja $z = g(x, y)$. Represente graficamente $g^{-1}(F(1, 2))$ e $g^{-1}(0)$.

1) **(Total: 3.0)** Seja $F(x, y) = xy$ e sejam

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (0, 3)) \leq 2, x \leq 0 \,\}, \\
C_2 &= \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (0, 3)) \leq 2, x > 0 \,\}, \\
C_3 &= \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (0, 3)) < 2, x \geq 0 \,\}, \\
C_4 &= \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (0, 3)) \geq 2, x \geq 0 \,\}.
\end{aligned}$$

a) **(1.0 pts)** Represente graficamente os conjunto C_1, C_2, C_1 e C_4.
b) **(1.0 pts)** Diga quais deles são abertos, quais são fechados, e quais são limitados. Não chute!!!
c) **(2.0 pts)** Faça um esboço das curvas de nível da função F no conjunto C_3 (dica: se você não conseguir fazer isso direto comece fazendo um esboço das curvas de nível da F em $\mathbb{R}^2$!). Mostre onde F assume valores mais altos e mais baixos e porque é que F não tem um máximo global no conjunto C_3.