Exercícios de substituição
Versão preliminar – data no rodapé
Isto aqui *complementa* o início da seção 6.1 do APEX Calculus!

Você já deve der reparado que nas aulas quando alguém tem uma dúvida é comum eu apontar pra um determinado sinal de igual e dizer pra pessoa que perguntou: “você concorda com esse igual”? E eu costumo repetir muitas vezes, principalmente logo antes das provas, “eu só vou corrigir os sinais de igual”...

Os ‘=’ são usados de várias formas em matemática. A gente tem situações em que o ‘=’ é sempre verdadeiro, como $(a+b)(a-b)=a^2+b^2$; situações em que queremos fazer com que um ‘=’ seja verdade, por exemplo $x+2=7$; e algumas situações nas quais o ‘=’ nunca é verdade... essas situações são distinguidas pelo texto em português em torno delas.

Neste curso vocês vão ter que deduzir várias fórmulas, e vai ser bem mais fácil discutir quais das fórmulas de vocês estão certas e porquê se a gente puder “discutir os sinais de ‘=’ ”. Pra isso nós vamos usar uma notação para substituição que aparece em textos sobre lambda-cálculo[1], mas que quase ninguém aqui do PURO conhece ou usa. Obs: NÃO USE ESSA NOTAÇÃO EM OUTROS CURSOS!!! Se vocês usarem vai acontecer o seguinte: 1) as outras pessoas não vão entender 2) vocês vão se ferrar (porque os professores querem que vocês escrevam de um jeito que todo mundo entenda) 3) eu vou rir da cara de vocês.

Nós normalmente escrevemos substituições meio em português e meio em matematiquês, como em:

Se substituirmos a por 6 e b por 10 em

$$\int_{x=a}^{x=b} x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

obtemos:

$$\int_{x=6}^{x=10} x\,dx = \frac{10^2}{2} - \frac{6^2}{2}$$

A notação de substituição vai nos permitir escrever isto como:

$$\left(\int_{x=a}^{x=b} x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)\begin{bmatrix} a := 6 \\ b := 10 \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\int_{x=6}^{x=10} x\,dx = \frac{10^2}{2} - \frac{6^2}{2}\right)$$

Nós também vamos usar essa notação para renomear variáveis e para substituir funções:

$$\left(\int_{x=a}^{x=b} x^2\,dx\right)\begin{bmatrix} x := t \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\int_{t=a}^{t=b} t^2\,dt\right)$$

$$\left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right)\begin{bmatrix} f(u) := \operatorname{sen} u \\ g(x) := x^2 \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x^2) = \operatorname{sen}'(x^2)\cdot 2x\right)$$

Note que o separador em cada linha do ‘[ ]’ é um ‘:=’, não um ‘=’! Quando sabemos que $\alpha=\beta$ sabemos que a partir daí podemos trocar qualquer α nas nossas expressões por β e vice-versa, mas o operador de substituição faz algo totalmente diferente disso: algo como $(x-y/z)\left[\begin{smallmatrix} x:=y \\ y:=z \\ z:=x \end{smallmatrix}\right]$ diz que devemos percorrer a expressão original, $(x-y/z)$, da esquerda pra direita, substituindo cada x, y e z nela *exatamente uma vez* — e o resultado é:

$$(x-y/z)\left[\begin{smallmatrix} x:=y \\ y:=z \\ z:=x \end{smallmatrix}\right] \quad = \quad y - z/x$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda_calculus

Integração por substituição
(S1), (S2), (S3): substituição na integral definida (mais concreta),
(S1I), (S2I), (S3I): substituição na integral indefinida (mais abstrata).
Os livros costumam começar pela fórmula (SI3), que é a mais abstrata de todas...
Nós vamos seguir um caminho bem diferente, e vamos tratar as fórmulas
(TFC2I), (S1I), (S2I), (S3I) como *abreviações* para as fórmulas
(TFC2), (S1), (S2), (S3).

Fórmulas :

$$\text{(TFC2)} \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \quad = \quad F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

$$\text{(S1)} \quad = \quad \begin{pmatrix} f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$\text{(S2)} \quad = \quad \begin{pmatrix} \text{Se } F'(x) = f(x) \text{ então:} & & \\ F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$\text{(S3)} \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \quad = \quad \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \right)$$

$$\text{(TFC2I)} \quad = \quad \left(\int F'(x)\,dx \quad = \quad F(x) \right)$$

$$\text{(S1I)} \quad = \quad \begin{pmatrix} f(g(x)) & = & \displaystyle\int f'(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ f(u) & = & \displaystyle\int f'(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$\text{(S2I)} \quad = \quad \begin{pmatrix} \text{Se } F'(x) = f(x) \text{ então:} & & \\ F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$\text{(S3I)} \quad = \quad \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx \quad = \quad \int f(u)\,du \right) [u = g(x)]$$

Exercícios:

a) (TFC2) $\begin{bmatrix} F(x):=-\cos x \\ a:=0 \\ b:=\pi \end{bmatrix}$
b) (TFC2) $\begin{bmatrix} F(x):=\cos x \end{bmatrix}$
c) (TFC2) $\begin{bmatrix} F(x):=\cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=\pi \end{bmatrix}$
d) (TFC2) $\begin{bmatrix} F(x):=\cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a:=\pi \\ b:=2\pi \end{bmatrix}$
e) (TFC2) $\begin{bmatrix} F(x):=\frac{1}{2}x^2 \\ a:=0 \\ b:=4 \end{bmatrix}$
f) (TFC2) $\begin{bmatrix} F(x):=\frac{1}{3}x^3 \\ a:=0 \\ b:=2 \end{bmatrix}$
g) $f(g(x))$ $\begin{bmatrix} f(u):=\operatorname{sen} u \\ g(x):=4x \end{bmatrix}$
h) $(f'(g(x))g'(x))$ $\begin{bmatrix} f(u):=\operatorname{sen} u \\ g(x):=4x \end{bmatrix}$
i) (S1) $\begin{bmatrix} f(u):=\operatorname{sen} u \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix}$
j) (S2) $\begin{bmatrix} F(u):=\operatorname{sen} u \\ f(u):=\cos u \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix}$
k) (S2) $\begin{bmatrix} f(u):=\cos u \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix}$
l) (S2) $\begin{bmatrix} f(u):=\sqrt{u} \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix}$
m) (S3) $\begin{bmatrix} f(u):=\sqrt{u} \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix}$

i') (S1I) $\begin{bmatrix} f(u):=\operatorname{sen} u \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix}$
i") (S1I) $\begin{bmatrix} f(u):=\operatorname{sen} u \\ g(x):=3x+4 \end{bmatrix}$
k') (S2I) $\begin{bmatrix} f(u):=\cos u \\ g(x):=3x+4 \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix}$
k") (S2I) $\begin{bmatrix} f(u):=\cos u \\ g(x):=3x+4 \end{bmatrix}$
m') (S3I) $\begin{bmatrix} f(u):=\sqrt{u} \\ g(x):=3x+4 \end{bmatrix}$

Exercícios sobre aproximações por retângulos
Um dos mini-testes vai ser sobre exercícios desta folha.
Versão preliminar – data no rodapé

Lembre que nas primeiras aulas do curso definimos:

$$\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}] & = & \sum_{i=1}^N f(a_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{R}] & = & \sum_{i=1}^N f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\min] & = & \sum_{i=1}^N \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\max] & = & \sum_{i=1}^N \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{M}] & = & \sum_{i=1}^N f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\mathrm{Trap}] & = & \sum_{i=1}^N \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[\inf] & = & \sum_{i=1}^N \inf(\{\, f(x) \mid x \in [a_i, b_i] \,\})(b_i - a_i) \\
[\sup] & = & \sum_{i=1}^N \sup(\{\, f(x) \mid x \in [a_i, b_i] \,\})(b_i - a_i) \\
\overline{\int}_P f(x)\,dx & = & \sum_{i=1}^N \sup(\{\, f(x) \mid x \in [a_i, b_i] \,\})(b_i - a_i) \\
\underline{\int}_P f(x)\,dx & = & \sum_{i=1}^N \inf(\{\, f(x) \mid x \in [a_i, b_i] \,\})(b_i - a_i)
\end{array}$$

As definições *formais* do sup e do inf são complicadíssimas e foram mostradas como curiosidade — mas a interpretação gráfica delas é simples: [sup] dá a "melhor aproximação por retângulos por cima" e [inf] dá a "melhor aproximação por retângulos por baixo".

Exercícios:

1) Seja $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{quando } x \le 2, \\ 6-x & \text{quando } 2 < x. \end{cases}$

Represente graficamente e calcule $\overline{\int}_P f(x)\,dx$ e $\underline{\int}_P f(x)\,dx$ no caso $P = \{0, 1, 4, 5\}$.

2) Seja $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{quando } x \neq 0, \\ 0 & \text{quando } x = 0. \end{cases}$

a) Qual é a diferença entre as funções $h(x)$ e $1/x$?

b) Represente graficamente e calcule $\overline{\int}_P h(x)\,dx$ e $\underline{\int}_P f(x)\,dx$ no caso $P = \{-1, -0.5, 0.5, 1\}$

c) ...e no caso $P = \{-1, -0.5, -0.1, 0, 0.1, 0.5, 1\}$.

3) Seja $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{quando } x \le 2, \\ 2 & \text{quando } 2 < x. \end{cases}$

a) Represente graficamente e calcule $\overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx$ no caso $P = \{1, 1.9, 2, 2.1, 4\}$.

4) Seja $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{quando } x \neq 0, \\ 0 & \text{quando } x = 0. \end{cases}$

a) Represente graficamente $\int_{x=-1}^{x=1} f(x)\,dx$.

b) Represente graficamente e calcule $\overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx$ no caso $P = \{-1, -0.5, -0.1, 0.1, 0.5, 1\}$.

Exercícios sobre funções definidas por casos
Seja Q o quadrilátero com os seguintes vértices: $A = (1,4)$, $B = (3,4)$, $C = (5,2)$, $D = (2,2)$.
Sejam f a função que dá a borda superior de Q e g a função que dá a borda inferior de Q.
Qual é o domínio da função f? E da g?

Dê uma definição formal por casos para f.
(Dica 1: cada caso deve ser da forma "$ax + b$ quando x está no intervalo tal").
(Dica 2: você pode escrever "x está no intervalo tal" como $42 \leq x \leq 99$ ou $42 \leq x < 99$).
(Dica 3: são dois casos).
Dê uma definição formal por casos para g. Use as dicas 1 e 3.

Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. Dê uma definição formal para $h(x)$.
Use as dicas acima, mas agora são três casos.

Seja $\alpha(t)$ a função que retorna a área do quadrilátero Q entre $x = 1$ e $x = t$.
Dê uma definição por casos para a função $\alpha(t)$.
Dica: comece escrevendo algo como

$$\alpha(t) = \begin{cases} \int_{x=42}^{x=t} h(x)\,dx & \text{quando } 42 \leq t \leq 99, \\ \int_{x=42}^{x=99} h(x)\,dx + \int_{x=99}^{x=t} h(x)\,dx & \text{quando } 99 < t \leq 123, \\ \int_{x=42}^{x=99} h(x)\,dx + \int_{x=99}^{x=123} h(x)\,dx + \int_{x=123}^{x=t} h(x)\,dx & \text{quando } 123 < t \leq 200 \end{cases}$$

depois calcule cada uma dessas integrais,
e depois teste a sua $\alpha(t)$ usando vários valores de t para os quais as áreas são fáceis de calcular a partir da figura no olhômetro: $t = 1$, $t = 1.5$, $t = 2$, $t = 2.5$, $t = 3$, $t = 4$, $t = 5$.

Obs: o mini-teste sobre esta lista de exercícios vai usar outro polígono.

Áreas sob o círculo unitário

O segundo quadro da aula de 27/setembro na turma pequena tem uma revisão do método que estamos usando para resolver coisas que precisariam de identidades trigonométricas, e depois uma discussão *muito rápida* da integral:

$$\int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Essa integral pode ser calculada geometricamente para alguns valores de a e b usando áreas de "pedaços de pizza" e "triângulos", e pode ser calculada algebricamente usando substituição trigonométrica e *vários* truques extras — ela é um exemplo interessante e difícil.

Revise todos passos que aparecem nessem quadro.
Revise os quadros das aulas de 18 e 19/setembro (substituição trigonométrica).
Compare a nossa abordagem com a seção 6.4 do APEX Calculus.
Aprenda como traçar o gráfico da função $\operatorname{arcsen} s$ (para $s \in [-1,1]$).
Descubra como calcular $\operatorname{sen} 2(\operatorname{arcsen} s)$. Para quais valores de s podemos calcular isto explicitamente?
Se você *realmente* tiver entendido todos eles você vai ser capaz de resolver cada um dos problemas abaixo só a partir dos enunciados deles numa folha de papel em branco, sem consultar nada:
a) Converta $(\operatorname{sen}\theta)^2$ para algo fácil de integrar.
b) Converta $(\cos 3\theta)^4$ para algo fácil de integrar.
c) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = ?$