Cálculo 3 - 2019.2

PDFzão com os todos os
PDFzinhos do semestre
juntados num só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2019.2-C3.html

Exercícios sobre "outros cortes"
Versão preliminar – data no rodapé
O mini-teste sobre esta lista de exercícios ia ser na quinta, 15/set/2019, mas algumas pessoas pediram pra adiá-lo...

Sejam:

$$F(x,y) = \begin{cases} \sqrt{5^2 - x^2 - y^2} & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 \geq 0, \\ 0 & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 < 0. \end{cases}$$

e $(x_0, y_0) = (2, 4)$.

1) O que são os conjuntos abaixo? Desenhe-os e/ou descreva-os em Português.

$$\begin{array}{rcl}
S &=& \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y) \,\} \\
A_3 &=& \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ z = 3 \,\} \\
A_4 &=& \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ z = 4 \,\} \\
A_5 &=& \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ z = 5 \,\} \\
A_0 &=& \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ z = 0 \,\} \\
A_{-1} &=& \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ z = -1 \,\} \\
B &=& \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ x = x_0 \,\} \\
B' &=& \{\, (y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x_0,y) \,\} \\
C &=& \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ y = y_0 \,\} \\
C' &=& \{\, (x,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y_0) \,\} \\
D_3 &=& \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 3 \,\} \\
D_4 &=& \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 4 \,\}
\end{array}$$

a) Quais deles são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$?
b) Quais deles são curvas de nível?
c) Dê dois pontos de cada um destes conjuntos: B, B', C, C', D_3, D_4.

2a) Qual é a derivada da função $z = F(x_0, y)$ em $y = y_0$?
b) Qual é a derivada da função $z = F(x, y_0)$ em $x = x_0$?
c) Como as derivadas que você obteve nos itens 2a e 2b nos ajudam a encontrar um vetor tangente à curva B' e um à curva C'? Eles são tangentes a estas curvas em que pontos? Dicas: nós fizemos exercícios sobre isso em 16/agosto (reveja a foto do quadro, e note que no final eu sugeri que usássemos aproximações numéricas pra fazer os desenhos!); leia a seção 2.2 do APEX Calculus; os vetores vão ter a forma $\overrightarrow{(1, \_)}$.
d) Como os vetores tangentes que você obteve no item 2c podem ser usados pra obter vetores tangentes às curvas B em C, que são em $\mathbb{R}^3$? Dica: estes vetores vão ser da forma $\overrightarrow{(1, 0, \_)}$ e $\overrightarrow{(0, 1, \_)}$.

Primeiro mini-teste
Aplicado no final de aula de 19/set/2019

Sejam:

$$F(x,y) = \begin{cases} \sqrt{5^2 - x^2 - y^2} & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 \geq 0, \\ 0 & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 < 0, \end{cases}$$

$(x_0, y_0) = (2, 4)$,
$E = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ y = y_0 \,\}$.

Represente graficamente o conjunto E e mostre como usá-lo para calcular $\frac{\partial}{\partial x} F(x,y)$ no ponto (x_0, y_0).

Problemas de revisão para a P1
(Adaptados do quadro de 2019oct17)

1) Vamos reusar uma função lá do início:

$$F(x,y) = \begin{cases} \sqrt{5^2 - x^2 - y^2} & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 \geq 0, \\ 0 & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 < 0. \end{cases}$$

a) Represente graficamente as curvas de nível abaixo:

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) &=& F(4,0), \\ F(x,y) &=& F(3,0), \\ F(x,y) &=& F(2,0), \\ F(x,y) &=& F(1,0) \end{array}$$

b) Descubra o vetor gradiente de F nos pontos $(4,0)$, $(3,0)$, $(2,0)$, $(1,0)$.

c) Use esses vatores pra desenhar sobre cada uma das suas curvas de nível do item (a) oito vetores gradientes *sem fazer conta nenhuma*.

2) O Bortolossi leva várias páginas pra definir abertos, fechados, interior, fecho, fronteira, compacto, etc — ele faz isso das páginas 142 até 146.

As nossas definições são:

$$\begin{array}{rcl} B_\epsilon(P) &=& \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,(x,y)) < \epsilon\,\} \\ \overline{B}_\epsilon(P) &=& \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,(x,y)) \leq \epsilon\,\} \\ \mathsf{Int}(A) &=& \{\,P \in A \mid \exists \epsilon > 0.\, B_\epsilon(P) \subset A\,\} \\ \overline{A} &=& \{\,P \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \epsilon > 0.\, B_\epsilon(P) \cap A \neq \emptyset\,\} \\ (A \text{ é aberto}) &=& (A = \mathsf{Int}(A)) \\ (A \text{ é fechado}) &=& (A = \overline{A}) \\ (A \text{ é limitado}) &=& (\exists R > 0.\, A \subseteq B_R((0,0))) \end{array}$$

a) Seja $C = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$.
Mostre que $C \neq \overline{C}$.

3) Sejam

$$\begin{array}{rcl} A &=& \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 2 \text{ e } 1 \leq x < 3\,\}, \\ B &=& \{\,(x,2) \mid x \in [0,4]\,\}, \\ C &=& A \cup B. \end{array}$$

Represente graficamente C.

4) Seja $A = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\,\}$.
Descreva uma função contínua $F : A \to \mathbb{R}$ que tenha mínimo global em A mas não tenha máximo global em A.

5) Seja $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ e seja $g(t)$ uma aproximação de segunda ordem para $f(t)$ em $t_0 = \pi$; ou seja, $g(t)$ é da forma

$$g(t) = P + t\vec{u} + t^2\vec{v} \qquad (*)$$

e obedece $g(t_0) = f(t_0)$, $g'(t_0) = f'(t_0)$, $g''(t_0) = f''(t_0)$,

a) Relembre o truque do ponto base: se $t = t_0 + \Delta t$, $\Delta t = t - t_0$,

$$g(t + \Delta t) = \underline{\quad} + \Delta t \underline{\quad} + (\Delta t)^2 \underline{\quad} \qquad (**)$$

a expressão $(**)$ pode ser convertida para $(*)$ e é fácil descobrir como preencher os "___"s pra que as condições $g(t_0) = f(t_0)$, $g'(t_0) = f'(t_0)$, $g''(t_0) = f''(t_0)$ sejam obedecidas.

b) Encontre uma função $g(t)$ que seja uma aproximação de segunda ordem para $f(t)$ em $t_0 = \pi$.

c) Verifique usando uma calculadora que $g(\pi + 0.1)$ é muito próximo de $f(\pi + 0.1)$; idem para $g(\pi - 0.1)$ é muito próximo de $f(\pi - 0.1)$.

d) Seja $h(t) = (\cos(\pi t^2), \operatorname{sen}(\pi t^2))$. Encontre uma aproximação de segunda ordem para $h(t)$ em $t_0 = 1$.

Exercícios sobre ponto base
Versão preliminar – data no rodapé
Contas fora do ponto base zeram a questão!

1) Seja:
$$\begin{array}{rcccccc} F(x,y) & = & a_{00} & + & a_{10}(x-x_0) & + & a_{20}(x-x_0)^2 \\ & + & a_{01}(y-y_0) & + & a_{11}(x-x_0)(y-y_0) & + & a_{21}(x-x_0)^2(y-y_0) \\ & + & a_{02}(y-y_0)^2 & + & a_{12}(x-x_0)(y-y_0)^2 & + & a_{22}(x-x_0)^2(y-y_0)^2. \end{array}$$

Calcule:
$$\begin{array}{lll} F(x_0,y_0), & F_x(x_0,y_0), & F_{xx}(x_0,y_0), \\ F_y(x_0,y_0), & F_{xy}(x_0,y_0), & F_{xxy}(x_0,y_0), \\ F_{yy}(x_0,y_0), & F_{xyy}(x_0,y_0), & F_{xxyy}(x_0,y_0), \end{array}$$

2) Seja
$$\begin{array}{rcccccc} G(x,y) & = & 4 & + & 5(x-2) & + & 6(x-2)^2 \\ & + & 7(y-3) & + & 8(x-2)(y-3) & + & 9(x-2)^2(y-3) \\ & + & 10(y-3)^2 & + & 11(x-2)(y-3)^2 & + & 12(x-2)^2(y-3)^2. \end{array}$$

Calcule:
$$\begin{array}{lll} G(2,3), & G_x(2,3), & G_{xx}(2,3), \\ G_y(2,3), & G_{xy}(2,3), & G_{xxy}(2,3), \\ G_{yy}(2,3), & G_{xyy}(2,3), & G_{xxyy}(2,3), \end{array}$$

(Dica: qual é o ponto base aqui?)

3) Leia a seção sobre Teorema de Young no Bortolossi. Dá pra aplicar o teorema de Young nas funções F e G?

4) Calcule todas as derivadas de 2ª ordem da função F. (Dica: procure no Bortolossi a definição de "derivadas de 2ª ordem!)

5) Calcule todas as derivadas de 3ª ordem da função $H(x,y) = x^2 y_2$.

6) Especialize o Teorema 7.7 do Bortolossi para o caso $l = 1$, $m = 2$, $n = 1$. Obs: o livro tem alguns erros de digitação nesse teorema, e às vezes ele troca 'l's por 'k's e 'k's por 'l's; considere que todas as funções são de classe C^k. *Escreva o seu resultado como um corolário.* Dica: leia as páginas 252 a 263 se precisar tirar dúvidas sobre matriz jacobiana.

7) Use o seu corolário para calcular $\frac{d}{dt}F(g(t), h(t))$.

8) Use o que você obteve no (7) para calcular $\frac{d}{dt}F(g(t), h(t))$ no caso em que $F(x,y) = x^2y^3$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, $h(t) = e^{4t}$.

9) Calcule $\frac{d}{dt}((\operatorname{sen} t)^2(e^{4t})^3)$ usando métodos de Cálculo 1.

Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.2
28/nov/2019 - Eduardo Ochs
Mini-teste sobre ponto base (MT2)
Contas fora do ponto base zeram a questão!

$$
\begin{array}{rcccccc}
\text{Seja } G(x,y) & = & 4 & + & 5(x-2) & + & 6(x-2)^2 \\
 & + & 7(y-3) & + & 8(x-2)(y-3) & + & 9(x-2)^2(y-3) \\
 & + & 10(y-3)^2 & + & 11(x-2)(y-3)^2 & + & 12(x-2)^2(y-3)^2. \\
 & + & 13(y-3)^3 & + & 14(x-2)(y-3)^3 & + & 15(x-2)^2(y-3)^3.
\end{array}
$$

1) Calcule F_{xyy}.
2) Calcule $F_{yxx}(2,3)$.

Obs: o ideal é que você saiba fazer contas destes tipos de cabeça.

Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.2
5/dez/2019 - Eduardo Ochs
Mini-teste sobre curvas de nível (MT3)
Vale 0.5 pontos a mais na questão 1d da P1.
(Quem acertou a 1d toda não precisa fazer)

A minha intenção com a questão 1d da P1 —

> "Represente graficamente a curva de nível da função $G = (\cos x)(\cos y)$ para $z = \frac{1}{2}$. Dica: represente como você acha que ela deve ser"

era fazer vocês verem que dá pra gente visualizar funções complicadas sem fazer muitas contas e sem precisar usar programas gráficos.

O livro do Bortolossi menciona algumas vezes a "função de Cobb-Douglas" $F(x, y) = x^{1/4}y^{3/4}$, mas nós ainda não vimos como visualizá-la...

Sabendo um pouquinho de C ou de planilhas dá pra fazer um diagrama de numerozinhos como o abaixo. Use-o para esboçar as curvas de nível $z = 0$, $z = 0.5$, $z = 1$ e $z = 1.5$, onde $z = F(x, y)$.

```
2.00 _|_ 0.00 0.42 0.71 0.96 1.19 1.41 1.61 1.81 2.00
1.75 _|_ 0.00 0.41 0.68 0.93 1.15 1.36 1.56 1.75 1.93
1.50 _|_ 0.00 0.39 0.66 0.89 1.11 1.31 1.50 1.68 1.86
1.25 _|_ 0.00 0.37 0.63 0.85 1.06 1.25 1.43 1.61 1.78
1.00 _|_ 0.00 0.35 0.59 0.81 1.00 1.18 1.36 1.52 1.68
0.75 _|_ 0.00 0.33 0.55 0.75 0.93 1.10 1.26 1.42 1.57
0.50 _|_ 0.00 0.30 0.50 0.68 0.84 0.99 1.14 1.28 1.41
0.25 _|_ 0.00 0.25 0.42 0.57 0.71 0.84 0.96 1.08 1.19
0.00 _|_ 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
 y       -+----+----+----+----+----+----+----+----+---
       x 0.00 0.25 0.50 0.75 1.00 1.25 1.50 1.75 2.00
```

Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.2
5/dez/2019 - Eduardo Ochs
Mini-teste sobre polinômios de Taylor (MT4)

1) Calcule $\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}F(g(t),h(t))$.
2) Calcule $\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}F(g(t_0),h(t_0))$ no caso em que:

$$\begin{array}{rcl}
t_0 &=& 6, \\
g(6) &=& 7, \\
h(6) &=& 8, \\
g'(6) &=& 1, \\
g''(t) &=& 0, \\
h''(t) &=& 0, \\
F(x,y) &=& a(x-7)^2 - b(x-7)(y-8) + c(y-8)^2.
\end{array}$$

Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.2
P1 - 18/outubro/2019 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Diagramas muito ambíguos serão interpretados errado.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 7.0)** Sejam:

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) &=& xy, \\ A &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 \le xy \le 1\,\}, \\ G(x,y) &=& (\cos x)(\cos y). \end{array}$$

a) **(0.5 pts)** Represente graficamente as curvas de nível da função F para $z=0$, $z=1$, $z=2$ e $z=-1$. Obs: quando você for representar várias curvas de nível num desenho só sempre deixe claro qual é cada uma!
b) **(0.5 pts)** Faça o diagrama de numerozinhos para a função G. Dica: os pontos em que as contas são fáceis são os em que tanto x quanto y são múltiplos de $\pi/2$.
c) **(1.5 pts)** Represente graficamente as curvas de nível da função G para $z=0$, $z=1$, $z=-1$.
d) **(2.5 pts)** Represente graficamente a curva de nível da função G para $z=\frac{1}{2}$. Dica: represente como você acha que ela deve ser.
e) **(0.5 pts)** Encontre máximos globais da função G em $\mathbb{R}^2$.
f) **(0.5 pts)** Encontre mínimos globais da função G em $\mathbb{R}^2$.
g) **(0.5 pts)** Represente graficamente o conjunto A.
h) **(0.5 pts)** Dá pra usar o Teorema de Weierstrass pra garantir que a função G tem máximos globais e mínimos globais no conjunto A?

2) **(Total: 1.5)** Seja $f(t)=(\cos t, t+\operatorname{sen} t)$. Encontre uma função $g(t)$ que seja uma aproximação de segunda ordem para $f(t)$ em $t_0=\pi$.

3) **(Total: 1.5)** Sejam $F(x,y)=x^2y^3$ e $(x_0,y_0)=(10,2)$. Dê a equação do plano tangente à superfície $S=\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=F(x,y)\,\}$ no ponto (x_0,y_0). Dica: comece calculando o gradiente.

Mini-gabarito
(Incompleto e não revisado — pode ter erros de conta!!!):

1a) (na outra folha)
1b) (na outra folha)
1c) (na outra folha)
1d) (na outra folha)
1e) ...por exemplo os pontos $(0,0)$, $(2\pi,0)$, (π,π) (em que $z=1$)
1f) ...por exemplo os pontos $(\pi,0)$, $(3\pi,0)$, $(0,\pi)$ (em que $z=-1$)
1g) A é a região fechada entre os eixos e $\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\,\}$.
1h) Não porque o conjunto A não é compacto (porque não é limitado).

2)
$$\begin{array}{rcl}
f(t) &=& (\cos t, t+\operatorname{sen} t), \\
f'(t) &=& \overrightarrow{(-\operatorname{sen} t, 1+\cos t)}, \\
f''(t) &=& \overrightarrow{(-\cos t, -\operatorname{sen} t)}, \\
f(t_0+\Delta x) &=& f(t_0)+f'(t_0)\Delta x+\frac{f''(t_0)}{2}(\Delta x)^2 \\
&=& f(\pi)+f'(\pi)\Delta x+\frac{f''(t_0)}{2}(\Delta x)^2 \\
&=& (-1,\pi+0)+\overrightarrow{(-0,1+(-1))}\Delta x+\frac{\overrightarrow{(-1,-0)}}{2}(\Delta x)^2 \\
&=& (-1,\pi)+\frac{\overrightarrow{(-1,-0)}}{2}(\Delta x)^2 \\
&=& (-1-\frac{1}{2}(\Delta x)^2,\pi)
\end{array}$$

3)
$$\begin{array}{rcl}
(x_0,y_0) &=& (10,2) \\
F(x,y) &=& x^2y^3 \qquad F(x_0,y_0) \;=\; 800 \\
F_x(x,y) &=& 2xy^3 \qquad F_x(x_0,y_0) \;=\; 160 \\
F_y(x,y) &=& 3x^2y^2 \qquad F_y(x_0,y_0) \;=\; 1200 \\
&& \qquad \nabla F(x_0,y_0) \;=\; \overrightarrow{(160,1200)}
\end{array}$$

Seja $G(x,y)$ a equação de plano tangente à superfície $z=F(x,y)$ em $(x,y)=(x_0,y_0)$.

Então
$$\begin{array}{rcl}
G(x,y) &=& F(x_0,y_0)+\nabla F(x_0,y_0)\cdot\overrightarrow{(x-x_0,y-y_0)} \\
&=& 800+\overrightarrow{(160,1200)}\cdot\overrightarrow{(x-x_0,y-y_0)} \\
&=& 800+160(x-x_0)+1200(y-y_0) \\
&=& 800+160(x-10)+1200(y-2)
\end{array}$$

Obs: o meu critério para pontuar questões parcialmente certas é *bem* subjetivo! Eu perdôo erros de conta se eu achar que se eles são pequenos, e eu considero que um erro de conta é "pequeno" se eu identifico ele rápido lendo o desenvolvimento da questão e *acho* que o aluno também poderia localizá-lo e consertá-lo rapidamente se revisasse a questão... eu acabo perdoando erros de conta muito mais facilmente se acho que o desenvolvimento da questão está razoavelmente bem escrito, e também se pouca gente acertou aquela questão.

Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.2
P2 - 12/dezembro/2019 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Contas fora do ponto base zeram a questão!
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 6.0)** Sejam

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) &=& x-(y-1)^2, \\ H(x,y) &=& x^2+4y^2-4, \\ D &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\leq 0\,\}, \\ L(x,y) &=& F(x,y)-\lambda H(x,y). \end{array}$$

a) **(1.0 pts)** Represente graficamente algumas curvas de nível de $F(x,y)$.
b) **(1.0 pts)** Represente graficamente o conjunto D.
c) **(1.5 pts)** Encontre os pontos $(x,y,\lambda)\in\mathbb{R}^3$ nos quais $(L_x,L_y,L_\lambda)=(0,0,0)$.
d) **(1.5 pts)** Verifique que os pontos que você encontrou no item anterior são os pontos da fronteira de D em que ∇F é múltiplo de ∇H.
e) **(1.0 pts)** Algum dos pontos que você obteve no item anterior é o máximo global de F em D? Algum deles é o mínimo global? Porquê? Explique usando o que você descobriu nos itens anteriores.

2) **(Total: 4.5)** Sejam:

$$\begin{array}{rcl} t_0 &=& 5, \\ g(5) &=& 6, \\ h(5) &=& 7, \\ g'(5) &=& 1, \\ h'(5) &=& m, \\ g''(t) &=& 0, \quad \text{(para todo } t\in\mathbb{R}) \\ h''(t) &=& 0, \quad \text{(para todo } t\in\mathbb{R}) \\ F(x,y) &=& 4(x-6)^2+\gamma(x-6)(y-7)+9(y-7)^2, \\ \alpha &=& \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}F(g(t_0),h(t_0)). \end{array}$$

Será que o ponto $(g(t_0),h(t_0))$ é mínimo local da F? Qual é o comportamento da F em torno deste ponto? Ela é um parabolóide, uma sela, ou o quê?...

a) **(2.0 pts)** Calcule α.
b) **(1.0 pts)** Suponha que $\gamma=12$. Encontre o único valor de m que faz $\alpha=0$.
c) **(1.0 pts)** Suponha que $\gamma=0$. Mostre que não existe $m\in\mathbb{R}$ com $\alpha=0$.
d) **(0.5 pts)** Suponha que m tenha o valor que você encontrou no item b. Represente graficamente a trajetória $(g(t),h(t))$ e indique nela os pontos com $t=4$, $t=5$ e $t=6$.

Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.2 - Eduardo Ochs
VR - 13/dez/2019
Versão para quem perdeu a P1.
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 6.0)** Na P1 nós vimos como encontrar uma representação gráfica aproximada para as curvas de nível da função $G_{\mathrm{P1}}(x,y) = (\cos x)(\cos y)$ na mão, sem usar calculadora. Agora vamos fazer o mesmo para a função $G(x,y) = G_{\mathrm{VR}}(x,y) = (\operatorname{sen} x) + (\operatorname{sen} y)$, mas usando alguns truques diferentes.
Seja $\alpha = \pi/6 = 180°/6 = 30°$. Senos e cossenos de múltiplos de α — isto é, de números da forma $k\alpha$, onde $k \in \mathbb{Z}$ — são fáceis de calcular, e para muitos valores de k o resultado vai ser um número racional:

k	$k\alpha$	$\cos k\alpha$	$\operatorname{sen} k\alpha$
0	$0°$	$\sqrt{4}/\sqrt{4} = 1$	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$
1	$30°$	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$
	$45°$	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$
2	$60°$	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$
3	$90°$	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$	$\sqrt{4}/\sqrt{4} = 1$
4	$120°$	$-\sqrt{1}/\sqrt{4} = -1/2$	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$
	$135°$	$-\sqrt{2}/\sqrt{4}$	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$
5	$150°$	$-\sqrt{3}/\sqrt{4}$	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$
6	$180°$	$-\sqrt{4}/\sqrt{4} = -1$	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$

a) **(1.5 pts)** Faça um diagrama de numerozinhos para a função $G(x,y)$. Dica: use só pontos $x, y \in \frac{\pi}{6}\mathbb{Z}$, e ignore os pontos em que o resultado dá algo complicado... por exemplo, $G(\frac{\pi}{6}, 2\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$, então $(\frac{\pi}{6}, 2\frac{\pi}{6})$ é um ponto complicado. *O seu diagrama tem que ter pelo menos 20 pontos "simples".*
a) **(2.0 pts)** Represente graficamente $\nabla G(x,y)$ em pelo menos 20 pontos "simples". Obs: os pontos em que $\nabla G(x,y)$ tem ambas as componentes racionais são diferentes dos pontos em que $\nabla G(x,y)$ é racional! *O seu diagrama tem que ter pelo menos 20 vetores.*
c) **(2.5 pts)** Use o que você descobriu nos itens anteriores pra esboçar as curvas de nível de $z = G(x,y)$ para $z = 2$, $z = -2$, $z = 0$, $z = 1$, $z = -1$, $z = \frac{1}{2}$, $z = -\frac{1}{2}$.

2) **(Total: 2.0)** Seja $f(t) = (\cos t, 2\operatorname{sen} t)$.
a) **(1.0 pts)** Escolha pelo menos 5 valores de t em $[0,\pi]$ em que as contas são fáceis e represente graficamente $f(t) + f'(t)$. Use isto para fazer um esboço da trajetória $f(t)$. Não esqueça de indicar o t associado a cada ponto da trajetória!
b) **(1.0 pts)** Encontre uma função $g(t)$ que seja uma aproximação de segunda ordem para $f(t)$ em $t_0 = \pi$.

3) **(Total: 2.0)** Sejam $F(x,y) = x^2\sqrt{y}$ e $(x_0, y_0) = (10, 4)$. Dê a equação do plano tangente à superfície $S = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y) \,\}$ no ponto (x_0, y_0). Dica: comece calculando o gradiente.

Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.2 - Eduardo Ochs
VR - 13/dez/2019
Versão para quem perdeu a P2.
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.
Contas fora do ponto base anulam a questão!

1) **(Total: 6.0)** Sejam

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) & = & x-(y-1)^2, \\ H(x,y) & = & x^2+4y^2-4, \\ D & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\le 0\,\}, \\ L(x,y) & = & F(x,y)-\lambda H(x,y). \end{array}$$

a) **(1.0 pts)** Represente graficamente algumas curvas de nível de $F(x,y)$.
b) **(1.0 pts)** Represente graficamente o conjunto D.
c) **(1.5 pts)** Encontre os pontos $(x,y,\lambda)\in\mathbb{R}^3$ nos quais $(L_x,L_y,L_\lambda)=(0,0,0)$. Aliás, tente encontrar estes pontos e mostre que equação de 4º grau você precisaria resolver pra encontrar os valores exatos pra eles.
d) **(2.5 pts)** Encontre aproximações olhométricas para os pontos da fronteira de D em que ∇F é múltiplo de ∇H. Faça as contas com os pontos que você obteve no olho e verifique que nesses pontos os gradientes ∇F e ∇H são quase paralelos.
e) **(1.0 pts)** Algum dos pontos que você obteve no item anterior é (uma aproximação para) um máximo global de F em D? Algum deles é (uma aproximação para) um mínimo global? Porquê? Explique usando o que você descobriu nos itens anteriores.

2) **(Total: 4.5)** Sejam:

$$\begin{array}{rcll} t_0 & = & 5, & \\ g(5) & = & 6, & \\ h(5) & = & 7, & \\ g'(5) & = & 1, & \\ h'(5) & = & m, & \\ g''(t) & = & 0, & \text{(para todo } t\in\mathbb{R}) \\ h''(t) & = & 0, & \text{(para todo } t\in\mathbb{R}) \\ F(x,y) & = & 9(x-6)^2+\gamma(x-6)(y-7)+4(y-7)^2, & \\ \alpha & = & \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}F(g(t_0),h(t_0)). & \end{array}$$

Será que o ponto $(g(t_0),h(t_0))$ é mínimo local da F? Qual é o comportamento da F em torno deste ponto? Ela é um parabolóide, uma sela, ou o quê?...

a) **(2.0 pts)** Calcule α.
b) **(1.0 pts)** Suponha que $\gamma=12$. Encontre o único valor de m que faz $\alpha=0$.
c) **(1.0 pts)** Suponha que $\gamma=0$. Mostre que não existe $m\in\mathbb{R}$ com $\alpha=0$.
d) **(0.5 pts)** Suponha que m tenha o valor que você encontrou no item b. Represente graficamente a trajetória $(g(t),h(t))$ e indique nela os pontos com $t=4$, $t=5$ e $t=6$.

Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.2 - Eduardo Ochs
VS - 19/dez/2019
Contas fora do ponto base zeram a questão!
Desenhos muito ambíguos serão interpretados errado.
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

Seja $\alpha = \pi/6 = 180°/6 = 30°$. Senos e cossenos de múltiplos de α — isto é, de números da forma $k\alpha$, onde $k \in \mathbb{Z}$ — são fáceis de calcular, e para muitos valores de k o resultado vai ser um número racional:

k	$k\alpha$	$\cos k\alpha$	$\operatorname{sen} k\alpha$
0	$0°$	$\sqrt{4}/\sqrt{4} = 1$	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$
1	$30°$	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$
	$45°$	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$
2	$60°$	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$
3	$90°$	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$	$\sqrt{4}/\sqrt{4} = 1$
4	$120°$	$-\sqrt{1}/\sqrt{4} = -1/2$	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$
	$135°$	$-\sqrt{2}/\sqrt{4}$	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$
5	$150°$	$-\sqrt{3}/\sqrt{4}$	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$
6	$180°$	$-\sqrt{4}/\sqrt{4} = -1$	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$

Em algumas das questões abaixo vou dizer que certos senos e cossenos são "muito fáceis" de calcular quando dão resultados inteiros, "fáceis" quando dão resultados racionais, e "difíceis" quando dão resultados irracionais. Por exemplo, $\cos 90°$ é muito fácil; $\cos 60°$ é fácil, mas $\operatorname{sen} 60°$ é difícil.

1) **(Total: 2.0)** Seja $P(t) = (g(t), h(t)) = (\cos t, \operatorname{sen} 2t)$. Faça uma representação gráfica da trajetória $P(t)$ para t entre 0 e 2π. Dicas: comece representando $P(t) + P'(t)$ para todos os valores de t muito fáceis e "ligue os pontos"; anote ao lado de cada ponto o t associado a ele; use alguns ângulos só fáceis e alguns difíceis se você achar que eles podem te ajudar a fazer o desenho; use $\sqrt{2}/2 \approx 0.7$ use $\sqrt{3}/2 \approx 0.9$ se quiser. Use uma página inteira pro seu desenho final — ele tem que ficar bem claro e preciso.

2) **(Total: 2.0)** Seja $P(t) = (g(t), h(t)) = (\cos t, \operatorname{sen} 2t)$ de novo.
a) **(0.5 pts)** Encontre uma função $Q(t)$ que seja uma aproximação de 2ª ordem para $P(t)$ em $t_0 = \frac{\pi}{2}$.
b) **(1.0 pts)** Verifique que a sua $Q(t)$ obedece $P(t_0) = Q(t_0)$, $P'(t_0) = Q'(t_0)$, $P''(t_0) = Q''(t_0)$.
c) **(0.5 pts)** Reescreva a sua $Q(t)$ na forma $Q(t) = (at^2 + bt + c, dt^2 + et + f)$ — ou seja, sem a notação de ponto base.

3) **(Total: 3.5)** Sejam:

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) & = & x-y, \\ H(x,y) & = & x^2+4y^2-4, \\ D & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\le 0\,\}, \\ L(x,y) & = & F(x,y)-\lambda H(x,y). \end{array}$$

a) **(1.0 pts)** Represente num gráfico só o conjunto D e algumas curvas de nível da função $F(x,y)$.
b) **(0.5 pts)** Usando o gráfico anterior dê aproximações olhométricas para os pontos de máximo e mínimo da função $F(x,y)$ em D.
c) **(1.5 pts)** Use o multiplicador de Lagrange para obter os pontos exatos de máximo e mínimo de $F(x,y)$ em D.
d) **(0.5 pts)** Verifique que nos pontos que você obteve no item anterior os gradientes ∇F e ∇H são paralelos.

4) **(Total: 3.5)** Um dos problemas da P1 pedia pras pessoas descobrirem as curvas de nível da função $G(x,y)=(\cos x)(\cos y)$. Seja $H(x,y)=(\operatorname{sen} x)+(\operatorname{sen} y)$. Neste problema vamos tentar descobrir algumas curvas de nível da $H(x,y)$ na região D, onde

$$D=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,2\pi], y\in[0,\pi]\,\}.$$

a) **(2.0 pts)** Faça um diagrama de numerozinhos para a função $H(x,y)$ na região D. Ele deve incluir todos os pontos $(x,y)\in D$ nos quais tanto $\operatorname{sen} x$ quanto $\operatorname{sen} y$ são muito fáceis e idealmente também todos os pontos nos quais tanto $\operatorname{sen} x$ quanto $\operatorname{sen} y$ são pelo menos fáceis (mas não necessariamente muito fáceis). Use uma página inteira pra versão final desse diagram pra poder fazer ele claro e detalhado.
b) **(1.5 pts)** Use o diagrama que você obteve no item anterior pra fazer boas aproximações para as curvas de nível de $H(x,y)=z$ para $z=1$, $z=\frac{1}{2}$, $z=0$.

Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.2 - Eduardo Ochs
VS - 20/dez/2019
Contas fora do ponto base zeram a questão!
Desenhos muito ambíguos serão interpretados errado.
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

Seja $\alpha = \pi/6 = 180°/6 = 30°$. Senos e cossenos de múltiplos de α — isto é, de números da forma $k\alpha$, onde $k \in \mathbb{Z}$ — são fáceis de calcular, e para muitos valores de k o resultado vai ser um número racional:

k	$k\alpha$	$\cos k\alpha$	$\operatorname{sen} k\alpha$
0	$0°$	$\sqrt{4}/\sqrt{4} = 1$	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$
1	$30°$	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$
	$45°$	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$
2	$60°$	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$
3	$90°$	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$	$\sqrt{4}/\sqrt{4} = 1$
4	$120°$	$-\sqrt{1}/\sqrt{4} = -1/2$	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$
	$135°$	$-\sqrt{2}/\sqrt{4}$	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$
5	$150°$	$-\sqrt{3}/\sqrt{4}$	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$
6	$180°$	$-\sqrt{4}/\sqrt{4} = -1$	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$

Em algumas das questões abaixo vou dizer que certos senos e cossenos são “muito fáceis” de calcular quando dão resultados inteiros, “fáceis” quando dão resultados racionais, e “difíceis” quando dão resultados irracionais. Por exemplo, $\cos 90°$ é muito fácil; $\cos 60°$ é fácil, mas $\operatorname{sen} 60°$ é difícil.

1) **(Total: 2.0)** Seja $P(t) = (g(t), h(t)) = (\cos 2t, \operatorname{sen} t)$. Faça uma representação gráfica da trajetória $P(t)$ para t entre 0 e 2π. Dicas: comece representando $P(t) + P'(t)$ para todos os valores de t muito fáceis e “ligue os pontos”; anote ao lado de cada ponto o t associado a ele; use alguns ângulos só fáceis e alguns difíceis se você achar que eles podem te ajudar a fazer o desenho; use $\sqrt{2}/2 \approx 0.7$ use $\sqrt{3}/2 \approx 0.9$ se quiser. Use uma página inteira pro seu desenho final — ele tem que ficar bem claro e preciso.

2) **(Total: 2.0)** Seja $P(t) = (g(t), h(t)) = (\cos 2t, \operatorname{sen} t)$ de novo.
a) **(0.5 pts)** Encontre uma função $Q(t)$ que seja uma aproximação de 2^{a} ordem para $P(t)$ em $t_0 = \frac{\pi}{2}$.
b) **(1.0 pts)** Verifique que a sua $Q(t)$ obedece $P(t_0) = Q(t_0)$, $P'(t_0) = Q'(t_0)$, $P''(t_0) = Q''(t_0)$.
c) **(0.5 pts)** Reescreva a sua $Q(t)$ na forma $Q(t) = (at^2 + bt + c, dt^2 + et + f)$ — ou seja, sem a notação de ponto base.

3) **(Total: 3.5)** Sejam:

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) & = & 3x - y, \\ H(x,y) & = & x^2 + 4y^2 - 4, \\ D & = & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x,y) \leq 0 \,\}, \\ L(x,y) & = & F(x,y) - \lambda H(x,y). \end{array}$$

a) **(1.0 pts)** Represente num gráfico só o conjunto D e algumas curvas de nível da função $F(x,y)$.
b) **(0.5 pts)** Usando o gráfico anterior dê aproximações olhométricas para os pontos de máximo e mínimo da função $F(x,y)$ em D.
c) **(1.5 pts)** Use o multiplicador de Lagrange para obter os pontos exatos de máximo e mínimo de $F(x,y)$ em D.
d) **(0.5 pts)** Verifique que nos pontos que você obteve no item anterior os gradientes ∇F e ∇H são paralelos.

4) **(Total: 3.5)** Um dos problemas da P1 pedia pras pessoas descobrirem as curvas de nível da função $G(x,y) = (\cos x)(\cos y)$. Seja $H(x,y) = (\operatorname{sen} x) + (\operatorname{sen} y)$. Neste problema vamos tentar descobrir algumas curvas de nível da $H(x,y)$ na região D, onde

$$D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 2\pi], y \in [0, \pi] \,\}.$$

a) **(2.0 pts)** Faça um diagrama de numerozinhos para a função $H(x,y)$ na região D. Ele deve incluir todos os pontos $(x,y) \in D$ nos quais tanto $\operatorname{sen} x$ quanto $\operatorname{sen} y$ são muito fáceis e idealmente também todos os pontos nos quais tanto $\operatorname{sen} x$ quanto $\operatorname{sen} y$ são pelo menos fáceis (mas não necessariamente muito fáceis). Use uma página inteira pra versão final desse diagram pra poder fazer ele claro e detalhado.
b) **(1.5 pts)** Use o diagrama que você obteve no item anterior pra fazer boas aproximações para as curvas de nível de $H(x,y) = z$ para $z = 1$, $z = \frac{1}{2}$, $z = 0$.