Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.2 - Eduardo Ochs
VR - 13/dez/2019
Versão para quem perdeu a P1.
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 6.0)** Na P1 nós vimos como encontrar uma representação gráfica aproximada para as curvas de nível da função $G_{\mathrm{P1}}(x,y) = (\cos x)(\cos y)$ na mão, sem usar calculadora. Agora vamos fazer o mesmo para a função $G(x,y) = G_{\mathrm{VR}}(x,y) = (\operatorname{sen} x) + (\operatorname{sen} y)$, mas usando alguns truques diferentes.
Seja $\alpha = \pi/6 = 180°/6 = 30°$. Senos e cossenos de múltiplos de α — isto é, de números da forma $k\alpha$, onde $k \in \mathbb{Z}$ — são fáceis de calcular, e para muitos valores de k o resultado vai ser um número racional:

k	$k\alpha$	$\cos k\alpha$	$\operatorname{sen} k\alpha$
0	$0°$	$\sqrt{4}/\sqrt{4} = 1$	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$
1	$30°$	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$
	$45°$	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$
2	$60°$	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$
3	$90°$	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$	$\sqrt{4}/\sqrt{4} = 1$
4	$120°$	$-\sqrt{1}/\sqrt{4} = -1/2$	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$
	$135°$	$-\sqrt{2}/\sqrt{4}$	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$
5	$150°$	$-\sqrt{3}/\sqrt{4}$	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$
6	$189°$	$-\sqrt{4}/\sqrt{4} = -1$	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$

a) **(1.5 pts)** Faça um diagrama de numerozinhos para a função $G(x,y)$. Dica: use só pontos $x, y \in \frac{\pi}{6}\mathbb{Z}$, e ignore os pontos em que o resultado dá algo complicado... por exemplo, $G(\frac{\pi}{6}, 2\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$, então $(\frac{\pi}{6}, 2\frac{\pi}{6})$ é um ponto complicado. *O seu diagrama tem que ter pelo menos 20 pontos "simples".*
a) **(2.0 pts)** Represente graficamente $\nabla G(x,y)$ em pelo menos 20 pontos "simples". Obs: os pontos em que $\nabla G(x,y)$ tem ambas as componentes racionais são diferentes dos pontos em que $\nabla G(x,y)$ é racional! *O seu diagrama tem que ter pelo menos 20 vetores.*
c) **(2.5 pts)** Use o que você descobriu nos itens anteriores pra esboçar as curvas de nível de $z = G(x,y)$ para $z = 2$, $z = -2$, $z = 0$, $z = 1$, $z = -1$, $z = \frac{1}{2}$, $z = -\frac{1}{2}$.

2) **(Total: 2.0)** Seja $f(t) = (\cos t, 2\operatorname{sen} t)$.
a) **(1.0 pts)** Escolha pelo menos 5 valores de t em $[0,\pi]$ em que as contas são fáceis e represente graficamente $f(t) + f'(t)$. Use isto para fazer um esboço da trajetória $f(t)$. Não esqueça de indicar o t associado a cada ponto da trajetória!
b) **(1.0 pts)** Encontre uma função $g(t)$ que seja uma aproximação de segunda ordem para $f(t)$ em $t_0 = \pi$.

3) **(Total: 2.0)** Sejam $F(x,y) = x^2\sqrt{y}$ e $(x_0, y_0) = (10, 4)$. Dê a equação do plano tangente à superfície $S = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y) \,\}$ no ponto (x_0, y_0). Dica: comece calculando o gradiente.

Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.2 - Eduardo Ochs
VR - 13/dez/2019
Versão para quem perdeu a P2.
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.
Contas fora do ponto base anulam a questão!

1) **(Total: 6.0)** Sejam

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) & = & x-(y-1)^2, \\ H(x,y) & = & x^2+4y^2-4, \\ D & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\le 0\,\}, \\ L(x,y) & = & F(x,y)-\lambda H(x,y). \end{array}$$

a) **(1.0 pts)** Represente graficamente algumas curvas de nível de $F(x,y)$.
b) **(1.0 pts)** Represente graficamente o conjunto D.
c) **(1.5 pts)** Encontre os pontos $(x,y,\lambda)\in\mathbb{R}^3$ nos quais $(L_x,L_y,L_\lambda)=(0,0,0)$. Aliás, tente encontrar estes pontos e mostre que equação de 4º grau você precisaria resolver pra encontrar os valores exatos pra eles.
d) **(2.5 pts)** Encontre aproximações olhométricas para os pontos da fronteira de D em que ∇F é múltiplo de ∇H. Faça as contas com os pontos que você obteve no olho e verifique que nesses pontos os gradientes ∇F e ∇H são quase paralelos.
e) **(1.0 pts)** Algum dos pontos que você obteve no item anterior é (uma aproximação para) um máximo global de F em D? Algum deles é (uma aproximação para) um mínimo global? Porquê? Explique usando o que você descobriu nos itens anteriores.

2) **(Total: 4.5)** Sejam:

$$\begin{array}{rcl} t_0 & = & 5, \\ g(5) & = & 6, \\ h(5) & = & 7, \\ g'(5) & = & 1, \\ h'(5) & = & m, \\ g''(t) & = & 0, \quad \text{(para todo } t\in\mathbb{R}) \\ h''(t) & = & 0, \quad \text{(para todo } t\in\mathbb{R}) \\ F(x,y) & = & 9(x-6)^2+\gamma(x-6)(y-7)+4(y-7)^2, \\ \alpha & = & \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}F(g(t_0),h(t_0)). \end{array}$$

Será que o ponto $(g(t_0),h(t_0))$ é mínimo local da F? Qual é o comportamento da F em torno deste ponto? Ela é um parabolóide, uma sela, ou o quê?...
a) **(2.0 pts)** Calcule α.
b) **(1.0 pts)** Suponha que $\gamma=12$. Encontre o único valor de m que faz $\alpha=0$.
c) **(1.0 pts)** Suponha que $\gamma=0$. Mostre que não existe $m\in\mathbb{R}$ com $\alpha=0$.
d) **(0.5 pts)** Suponha que m tenha o valor que você encontrou no item b. Represente graficamente a trajetória $(g(t),h(t))$ e indique nela os pontos com $t=4$, $t=5$ e $t=6$.