Exercícios sobre "outros cortes"
Versão preliminar – data no rodapé
O mini-teste sobre esta lista de exercícios ia ser na quinta, 15/set/2019,
mas algumas pessoas pediram pra adiá-lo...

Sejam:

$$F(x,y) = \begin{cases} \sqrt{5^2 - x^2 - y^2} & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 \geq 0, \\ 0 & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 < 0. \end{cases}$$

e $(x_0, y_0) = (2, 4)$.

1) O que são os conjuntos abaixo? Desenhe-os e/ou descreva-os em Português.

$$\begin{array}{rcl}
S & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y)\,\} \\
A_3 & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ z = 3\,\} \\
A_4 & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ z = 4\,\} \\
A_5 & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ z = 5\,\} \\
A_0 & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ z = 0\,\} \\
A_{-1} & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ z = -1\,\} \\
B & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ x = x_0\,\} \\
B' & = & \{\,(y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x_0,y)\,\} \\
C & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ y = y_0\,\} \\
C' & = & \{\,(x,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y_0)\,\} \\
D_3 & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 3\,\} \\
D_4 & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 4\,\}
\end{array}$$

a) Quais deles são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$?
b) Quais deles são curvas de nível?
c) Dê dois pontos de cada um destes conjuntos: B, B', C, C', D_3, D_4.

2a) Qual é a derivada da função $z = F(x_0, y)$ em $y = y_0$?
b) Qual é a derivada da função $z = F(x, y_0)$ em $x = x_0$?
c) Como as derivadas que você obteve nos itens 2a e 2b nos ajudam a encontrar um vetor tangente à curva B' e um à curva C'? Eles são tangentes a estas curvas em que pontos? Dicas: nós fizemos exercícios sobre isso em 16/agosto (reveja a foto do quadro, e note que no final eu sugeri que usássemos aproximações numéricas pra fazer os desenhos!); leia a seção 2.2 do APEX Calculus; os vetores vão ter a forma $\overrightarrow{(1, \_\_)}$.
d) Como os vetores tangentes que você obteve no item 2c podem ser usados pra obter vetores tangentes às curvas B em C, que são em $\mathbb{R}^3$? Dica: estes vetores vão ser da forma $\overrightarrow{(1, 0, \_\_)}$ e $\overrightarrow{(0, 1, \_\_)}$.

Primeiro mini-teste
Aplicado no final de aula de 19/set/2019

Sejam:

$$F(x,y) = \begin{cases} \sqrt{5^2 - x^2 - y^2} & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 \geq 0, \\ 0 & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 < 0, \end{cases}$$

$(x_0, y_0) = (2, 4)$,
$E = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x, y),\ y = y_0 \,\}$.

Represente graficamente o conjunto E e mostre como usá-lo para calcular $\frac{\partial}{\partial x} F(x, y)$ no ponto (x_0, y_0).

Problemas de revisão para a P1
(Adaptados do quadro de 2019oct17)

1) Vamos reusar uma função lá do início:

$$F(x,y) = \begin{cases} \sqrt{5^2 - x^2 - y^2} & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 \geq 0, \\ 0 & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 < 0. \end{cases}$$

a) Represente graficamente as curvas de nível abaixo:

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) & = & F(4,0), \\ F(x,y) & = & F(3,0), \\ F(x,y) & = & F(2,0), \\ F(x,y) & = & F(1,0) \end{array}$$

b) Descubra o vetor gradiente de F nos pontos $(4,0)$, $(3,0)$, $(2,0)$, $(1,0)$.

c) Use esses vatores pra desenhar sobre cada uma das suas curvas de nível do item (a) oito vetores gradientes *sem fazer conta nenhuma*.

2) O Bortolossi leva várias páginas pra definir abertos, fechados, interior, fecho, fronteira, compacto, etc — ele faz isso das páginas 142 até 146.

As nossas definições são:

$$\begin{array}{rcl} B_\epsilon(P) & = & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,(x,y)) < \epsilon \,\} \\ \overline{B}_\epsilon(P) & = & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(P,(x,y)) \leq \epsilon \,\} \\ \mathsf{Int}(A) & = & \{\, P \in A \mid \exists \epsilon > 0.\, B_\epsilon(P) \subset A \,\} \\ \overline{A} & = & \{\, P \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \epsilon > 0.\, B_\epsilon(P) \cap A \neq \emptyset \,\} \\ (A \text{ é aberto}) & = & (A = \mathsf{Int}(A)) \\ (A \text{ é fechado}) & = & (A = \overline{A}) \\ (A \text{ é limitado}) & = & (\exists R > 0.\, A \subseteq B_R((0,0))) \end{array}$$

a) Seja $C = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$.
Mostre que $C \neq \overline{C}$.

3) Sejam

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 2 \text{ e } 1 \leq x < 3 \,\}, \\ B & = & \{\, (x,2) \mid x \in [0,4] \,\}, \\ C & = & A \cup B. \end{array}$$

Represente graficamente C.

4) Seja $A = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \,\}$.
Descreva uma função contínua $F : A \to \mathbb{R}$ que tenha mínimo global em A mas não tenha máximo global em A.

5) Seja $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ e seja $g(t)$ uma aproximação de segunda ordem para $f(t)$ em $t_0 = \pi$; ou seja, $g(t)$ é da forma

$$g(t) = P + t\vec{u} + t^2\vec{v} \qquad (*)$$

e obedece $g(t_0) = f(t_0)$, $g'(t_0) = f'(t_0)$, $g''(t_0) = f''(t_0)$,

a) Relembre o truque do ponto base: se $t = t_0 + \Delta t$, $\Delta t = t - t_0$,

$$g(t + \Delta t) = \underline{\quad} + \Delta t \underline{\quad} + (\Delta t)^2 \underline{\quad} \qquad (**)$$

a expressão $(**)$ pode ser convertida para $(*)$ e é fácil descobrir como preencher os "___"s pra que as condições $g(t_0) = f(t_0)$, $g'(t_0) = f'(t_0)$, $g''(t_0) = f''(t_0)$ sejam obedecidas.

b) Encontre uma função $g(t)$ que seja uma aproximação de segunda ordem para $f(t)$ em $t_0 = \pi$.

c) Verifique usando uma calculadora que $g(\pi + 0.1)$ é muito próximo de $f(\pi + 0.1)$; idem para $g(\pi - 0.1)$ é muito próximo de $f(\pi - 0.1)$.

d) Seja $h(t) = (\cos(\pi t^2), \mathrm{sen}(\pi t^2))$. Encontre uma aproximação de segunda ordem para $h(t)$ em $t_0 = 1$.

Exercícios sobre ponto base
Versão preliminar – data no rodapé
Contas fora do ponto base zeram a questão!

1) Seja: $$\begin{array}{rcccccc} F(x,y) & = & a_{00} & + & a_{10}(x-x_0) & + & a_{20}(x-x_0)^2 \\ & + & a_{01}(y-y_0) & + & a_{11}(x-x_0)(y-y_0) & + & a_{21}(x-x_0)^2(y-y_0) \\ & + & a_{02}(y-y_0)^2 & + & a_{12}(x-x_0)(y-y_0)^2 & + & a_{22}(x-x_0)^2(y-y_0)^2. \end{array}$$

Calcule: $$\begin{array}{ccc} F(x_0,y_0), & F_x(x_0,y_0), & F_{xx}(x_0,y_0), \\ F_y(x_0,y_0), & F_{xy}(x_0,y_0), & F_{xxy}(x_0,y_0), \\ F_{yy}(x_0,y_0), & F_{xyy}(x_0,y_0), & F_{xxyy}(x_0,y_0), \end{array}$$

2) Seja $$\begin{array}{rcccccc} G(x,y) & = & 4 & + & 5(x-2) & + & 6(x-2)^2 \\ & + & 7(y-3) & + & 8(x-2)(y-3) & + & 9(x-2)^2(y-3) \\ & + & 10(y-3)^2 & + & 11(x-2)(y-3)^2 & + & 12(x-2)^2(y-3)^2. \end{array}$$

Calcule: $$\begin{array}{ccc} G(2,3), & G_x(2,3), & G_{xx}(2,3), \\ G_y(2,3), & G_{xy}(2,3), & G_{xxy}(2,3), \\ G_{yy}(2,3), & G_{xyy}(2,3), & G_{xxyy}(2,3), \end{array}$$

(Dica: qual é o ponto base aqui?)

3) Leia a seção sobre Teorema de Young no Bortolossi. Dá pra aplicar o teorema de Young nas funções F e G?

4) Calcule todas as derivadas de 2ª ordem da função F. (Dica: procure no Bortolossi a definição de "derivadas de 2ª ordem!)

5) Calcule todas as derivadas de 3ª ordem da função $H(x,y) = x^2 y_2$.

6) Especialize o Teorema 7.7 do Bortolossi para o caso $l = 1$, $m = 2$, $n = 1$. Obs: o livro tem alguns erros de digitação nesse teorema, e às vezes ele troca 'l's por 'k's e 'k's por 'l's; considere que todas as funções são de classe C^k. *Escreva o seu resultado como um corolário.* Dica: leia as páginas 252 a 263 se precisar tirar dúvidas sobre matriz jacobiana.

7) Use o seu corolário para calcular $\frac{d}{dt}F(g(t),h(t))$.

8) Use o que você obteve no (7) para calcular $\frac{d}{dt}F(g(t),h(t))$ no caso em que $F(x,y) = x^2y^3$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, $h(t) = e^{4t}$.

9) Calcule $\frac{d}{dt}((\operatorname{sen} t)^2(e^{4t})^3)$ usando métodos de Cálculo 1.

Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.2
28/nov/2019 - Eduardo Ochs
Mini-teste sobre ponto base
Contas fora do ponto base zeram a questão!

$$
\begin{array}{rcccccc}
\text{Seja } G(x,y) & = & 4 & + & 5(x-2) & + & 6(x-2)^2 \\
 & + & 7(y-3) & + & 8(x-2)(y-3) & + & 9(x-2)^2(y-3) \\
 & + & 10(y-3)^2 & + & 11(x-2)(y-3)^2 & + & 12(x-2)^2(y-3)^2. \\
 & + & 13(y-3)^3 & + & 14(x-2)(y-3)^3 & + & 15(x-2)^2(y-3)^3.
\end{array}
$$

1) Calcule F_{xyy}.
2) Calcule $F_{yxx}(2,3)$.

Obs: o ideal é que você saiba fazer contas destes tipos de cabeça.

Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.2
5/dez/2019 - Eduardo Ochs
Mini-teste sobre curvas de nível
Vale 0.5 pontos a mais na questão 1d da P1.
(Quem acertou a 1d toda não precisa fazer)

A minha intenção com a questão 1d da P1 —

> "Represente graficamente a curva de nível da função $G = (\cos x)(\cos y)$ para $z = \frac{1}{2}$. Dica: represente como você acha que ela deve ser"

era fazer vocês verem que dá pra gente visualizar funções complicadas sem fazer muitas contas e sem precisar usar programas gráficos.

O livro do Bortolossi menciona algumas vezes a "função de Cobb-Douglas" $F(x, y) = x^{1/4}y^{3/4}$, mas nós ainda não vimos como visualizá-la...

Sabendo um pouquinho de C ou de planilhas dá pra fazer um diagrama de numerozinhos como o abaixo. Use-o para esboçar as curvas de nível $z = 0$, $z = 0.5$, $z = 1$ e $z = 1.5$, onde $z = F(x, y)$.

```
2.00 _|_ 0.00 0.42 0.71 0.96 1.19 1.41 1.61 1.81 2.00
1.75 _|_ 0.00 0.41 0.68 0.93 1.15 1.36 1.56 1.75 1.93
1.50 _|_ 0.00 0.39 0.66 0.89 1.11 1.31 1.50 1.68 1.86
1.25 _|_ 0.00 0.37 0.63 0.85 1.06 1.25 1.43 1.61 1.78
1.00 _|_ 0.00 0.35 0.59 0.81 1.00 1.18 1.36 1.52 1.68
0.75 _|_ 0.00 0.33 0.55 0.75 0.93 1.10 1.26 1.42 1.57
0.50 _|_ 0.00 0.30 0.50 0.68 0.84 0.99 1.14 1.28 1.41
0.25 _|_ 0.00 0.25 0.42 0.57 0.71 0.84 0.96 1.08 1.19
0.00 _|_ 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
 y       -+----+----+----+----+----+----+----+----+---
       x 0.00 0.25 0.50 0.75 1.00 1.25 1.50 1.75 2.00
```

Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.2
5/dez/2019 - Eduardo Ochs
Mini-teste sobre polinômios de Taylor

1) Calcule $\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}F(g(t),h(t))$.
2) Calcule $\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}F(g(t_0),h(t_0))$ no caso em que:

$$\begin{array}{rcl}
t_0 &=& 6, \\
g(6) &=& 7, \\
h(6) &=& 8, \\
g'(6) &=& 1, \\
g''(t) &=& 0, \\
h''(t) &=& 0, \\
F(x,y) &=& a(x-7)^2 - b(x-7)(y-8) + c(y-8)^2.
\end{array}$$