

Cálculo 3 - 2019.2

PDFzão com os todos os
PDFzinhos do semestre
juntados num só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
<http://angg.twu.net/2019.2-C3.html>

Exercícios sobre “outros cortes”

Versão preliminar – data no rodapé

O mini-teste sobre esta lista de exercícios ia ser na quinta, 15/set/2019, mas algumas pessoas pediram pra adiá-lo...

Sejam:

$$F(x, y) = \begin{cases} \sqrt{5^2 - x^2 - y^2} & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 \geq 0, \\ 0 & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 < 0. \end{cases}$$

$$\text{e } (x_0, y_0) = (2, 4).$$

1) O que são os conjuntos abaixo? Desenhe-os e/ou descreva-os em Português.

$$\begin{aligned} S &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x, y) \} \\ A_3 &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x, y), z = 3 \} \\ A_4 &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x, y), z = 4 \} \\ A_5 &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x, y), z = 5 \} \\ A_0 &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x, y), z = 0 \} \\ A_{-1} &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x, y), z = -1 \} \\ B &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x, y), x = x_0 \} \\ B' &= \{ (y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x_0, y) \} \\ C &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x, y), y = y_0 \} \\ C' &= \{ (x, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x, y_0) \} \\ D_3 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 3 \} \\ D_4 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 4 \} \end{aligned}$$

- a) Quais deles são funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} ?
 b) Quais deles são curvas de nível?
 c) Dê dois pontos de cada um destes conjuntos: B, B', C, C', D_3, D_4 .

2a) Qual é a derivada da função $z = F(x_0, y)$ em $y = y_0$?

b) Qual é a derivada da função $z = F(x, y_0)$ em $x = x_0$?

c) Como as derivadas que você obteve nos itens 2a e 2b nos ajudam a encontrar um vetor tangente à curva B' e um à curva C' ? Eles são tangentes a estas curvas em que pontos? Dicas: nós fizemos exercícios sobre isso em 16/agosto (veja a foto do quadro, e note que no final eu sugeri que usássemos aproximações numéricas pra fazer os desenhos!); leia a seção 2.2 do APEX Calculus; os vetores vão ter a forma $\overrightarrow{(1, _)}$.

d) Como os vetores tangentes que você obteve no item 2c podem ser usados pra obter vetores tangentes às curvas B em C , que são em \mathbb{R}^3 ? Dica: estes vetores vão ser da forma $\overrightarrow{(1, 0, _)}$ e $\overrightarrow{(0, 1, _)}$.

Primeiro mini-teste
Aplicado no final de aula de 19/set/2019

Sejam:

$$F(x, y) = \begin{cases} \sqrt{5^2 - x^2 - y^2} & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 \geq 0, \\ 0 & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 < 0, \end{cases}$$

$$(x_0, y_0) = (2, 4),$$

$$E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x, y), y = y_0 \}.$$

Represente graficamente o conjunto E e mostre como usá-lo para calcular $\frac{\partial}{\partial x} F(x, y)$ no ponto (x_0, y_0) .

Problemas de revisão para a P1

(Adaptados do quadro de 2019oct17)

1) Vamos reusar uma função lá do início:

$$F(x, y) = \begin{cases} \sqrt{5^2 - x^2 - y^2} & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 \geq 0, \\ 0 & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 < 0. \end{cases}$$

a) Represente graficamente as curvas de nível abaixo:

$$F(x, y) = F(4, 0),$$

$$F(x, y) = F(3, 0),$$

$$F(x, y) = F(2, 0),$$

$$F(x, y) = F(1, 0)$$

b) Descubra o vetor gradiente de F nos pontos $(4, 0)$, $(3, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 0)$.

c) Use esses valores pra desenhar sobre cada uma das suas curvas de nível do item (a) oito vetores gradientes *sem fazer conta nenhuma*.

2) O Bortolossi leva várias páginas pra definir abertos, fechados, interior, fecho, fronteira, compacto, etc — ele faz isso das páginas 142 até 146.

As nossas definições são:

$$B_\epsilon(P) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, (x, y)) < \epsilon \}$$

$$\overline{B}_\epsilon(P) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, (x, y)) \leq \epsilon \}$$

$$\text{Int}(A) = \{ P \in A \mid \exists \epsilon > 0. B_\epsilon(P) \subset A \}$$

$$\overline{A} = \{ P \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \epsilon > 0. B_\epsilon(P) \cap A \neq \emptyset \}$$

$$(A \text{ é aberto}) = (A = \text{Int}(A))$$

$$(A \text{ é fechado}) = (A = \overline{A})$$

$$(A \text{ é limitado}) = (\exists R > 0. A \subseteq B_R((0, 0)))$$

a) Seja $C = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$.

Mostre que $C \neq \overline{C}$.

3) Sejam

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 2 \text{ e } 1 \leq x < 3 \},$$

$$B = \{ (x, 2) \mid x \in [0, 4] \},$$

$$C = A \cup B.$$

Represente graficamente C .

4) Seja $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \}$.

Descreva uma função contínua $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ que tenha mínimo global em A mas não tenha máximo global em A .

5) Seja $f(t) = (\cos t, \sin t)$ e seja $g(t)$ uma aproximação de segunda ordem para $f(t)$ em $t_0 = \pi$; ou seja, $g(t)$ é da forma

$$g(t) = P + t\vec{u} + t^2\vec{v} \quad (*)$$

e obedece $g(t_0) = f(t_0)$, $g'(t_0) = f'(t_0)$, $g''(t_0) = f''(t_0)$,

a) Relembre o truque do ponto base: se $t = t_0 + \Delta t$, $\Delta t = t - t_0$,

$$g(t + \Delta t) = \text{___} + \Delta t \text{___} + (\Delta t)^2 \text{___} \quad (**)$$

a expressão (**) pode ser convertida para (*) e é fácil descobrir como preencher os “___”s pra que as condições $g(t_0) = f(t_0)$, $g'(t_0) = f'(t_0)$, $g''(t_0) = f''(t_0)$ sejam obedecidas.

b) Encontre uma função $g(t)$ que seja uma aproximação de segunda ordem para $f(t)$ em $t_0 = \pi$.

c) Verifique usando uma calculadora que $g(\pi + 0.1)$ é muito próximo de $f(\pi + 0.1)$; idem para $g(\pi - 0.1)$ é muito próximo de $f(\pi - 0.1)$.

d) Seja $h(t) = (\cos(\pi t^2), \sin(\pi t^2))$. Encontre uma aproximação de segunda ordem para $h(t)$ em $t_0 = 1$.

Exercícios sobre ponto base

Versão preliminar – data no rodapé

Contas fora do ponto base zeram a questão!

$$1) \text{ Seja: } F(x, y) = \begin{array}{r} a_{00} \\ + a_{01}(y - y_0) \\ + a_{02}(y - y_0)^2 \end{array} + \begin{array}{r} a_{10}(x - x_0) \\ + a_{11}(x - x_0)(y - y_0) \\ + a_{12}(x - x_0)(y - y_0)^2 \end{array} + \begin{array}{r} a_{20}(x - x_0)^2 \\ + a_{21}(x - x_0)^2(y - y_0) \\ + a_{22}(x - x_0)^2(y - y_0)^2 \end{array}.$$

$$\text{Calcule: } \begin{array}{lll} F(x_0, y_0), & F_x(x_0, y_0), & F_{xx}(x_0, y_0), \\ F_y(x_0, y_0), & F_{xy}(x_0, y_0), & F_{xxy}(x_0, y_0), \\ F_{yy}(x_0, y_0), & F_{xyy}(x_0, y_0), & F_{xyyy}(x_0, y_0), \end{array}$$

$$2) \text{ Seja } G(x, y) = \begin{array}{r} 4 \\ + 7(y - 3) \\ + 10(y - 3)^2 \end{array} + \begin{array}{r} 5(x - 2) \\ + 8(x - 2)(y - 3) \\ + 11(x - 2)(y - 3)^2 \end{array} + \begin{array}{r} 6(x - 2)^2 \\ + 9(x - 2)^2(y - 3) \\ + 12(x - 2)^2(y - 3)^2 \end{array}.$$

$$\text{Calcule: } \begin{array}{lll} G(2, 3), & G_x(2, 3), & G_{xx}(2, 3), \\ G_y(2, 3), & G_{xy}(2, 3), & G_{xxy}(2, 3), \\ G_{yy}(2, 3), & G_{xyy}(2, 3), & G_{xyyy}(2, 3), \end{array}$$

(Dica: qual é o ponto base aqui?)

3) Leia a seção sobre Teorema de Young no Bortolossi. Dá pra aplicar o teorema de Young nas funções F e G ?

4) Calcule todas as derivadas de 2ª ordem da função F . (Dica: procure no Bortolossi a definição de "derivadas de 2ª ordem!")

5) Calcule todas as derivadas de 3ª ordem da função $H(x, y) = x^2y_2$.

6) Especialize o Teorema 7.7 do Bortolossi para o caso $l = 1, m = 2, n = 1$. Obs: o livro tem alguns erros de digitação nesse teorema, e às vezes ele troca 'l's por 'k's e 'k's por 'l's; considere que todas as funções são de classe C^k . *Escreva o seu resultado como um corolário.* Dica: leia as páginas 252 a 263 se precisar tirar dúvidas sobre matriz jacobiana.

7) Use o seu corolário para calcular $\frac{d}{dt}F(g(t), h(t))$.

8) Use o que você obteve no (7) para calcular $\frac{d}{dt}F(g(t), h(t))$ no caso em que $F(x, y) = x^2y^3, g(t) = \sin t, h(t) = e^{4t}$.

9) Calcule $\frac{d}{dt}((\sin t)^2(e^{4t})^3)$ usando métodos de Cálculo 1.

Cálculo 3

PURO-UFF - 2019.2

28/nov/2019 - Eduardo Ochs

Mini-teste sobre ponto base (MT2)

Contas fora do ponto base zeram a questão!

$$\begin{aligned} \text{Seja } G(x, y) = & 4 + 5(x-2) + 6(x-2)^2 \\ & + 7(y-3) + 8(x-2)(y-3) + 9(x-2)^2(y-3) \\ & + 10(y-3)^2 + 11(x-2)(y-3)^2 + 12(x-2)^2(y-3)^2 \\ & + 13(y-3)^3 + 14(x-2)(y-3)^3 + 15(x-2)^2(y-3)^3. \end{aligned}$$

1) Calcule F_{xyy} .

2) Calcule $F_{yxx}(2, 3)$.

Obs: o ideal é que você saiba fazer contas destes tipos de cabeça.

Cálculo 3
 PURO-UFF - 2019.2
 5/dez/2019 - Eduardo Ochs
Mini-teste sobre curvas de nível (MT3)
 Vale 0.5 pontos a mais na questão 1d da P1.
 (Quem acertou a 1d toda não precisa fazer)

A minha intenção com a questão 1d da P1 —

“Represente graficamente a curva de nível da função $G = (\cos x)(\cos y)$
 para $z = \frac{1}{2}$. Dica: represente como você acha que ela deve ser”

era fazer vocês verem que dá pra gente visualizar funções complicadas sem fazer muitas contas e sem precisar usar programas gráficos.

O livro do Bortolossi menciona algumas vezes a “função de Cobb-Douglas” $F(x, y) = x^{1/4}y^{3/4}$, mas nós ainda não vimos como visualizá-la...

Sabendo um pouquinho de C ou de planilhas dá pra fazer um diagrama de numerozinhos como o abaixo. Use-o para esboçar as curvas de nível $z = 0$, $z = 0.5$, $z = 1$ e $z = 1.5$, onde $z = F(x, y)$.

2.00	_ _	0.00	0.42	0.71	0.96	1.19	1.41	1.61	1.81	2.00	
1.75	_ _	0.00	0.41	0.68	0.93	1.15	1.36	1.56	1.75	1.93	
1.50	_ _	0.00	0.39	0.66	0.89	1.11	1.31	1.50	1.68	1.86	
1.25	_ _	0.00	0.37	0.63	0.85	1.06	1.25	1.43	1.61	1.78	
1.00	_ _	0.00	0.35	0.59	0.81	1.00	1.18	1.36	1.52	1.68	
0.75	_ _	0.00	0.33	0.55	0.75	0.93	1.10	1.26	1.42	1.57	
0.50	_ _	0.00	0.30	0.50	0.68	0.84	0.99	1.14	1.28	1.41	
0.25	_ _	0.00	0.25	0.42	0.57	0.71	0.84	0.96	1.08	1.19	
0.00	_ _	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
y			+	+	+	+	+	+	+	+	
		x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00

Cálculo 3
PURO-UFF - 2019.2
5/dez/2019 - Eduardo Ochs
Mini-teste sobre polinômios de Taylor (MT4)

- 1) Calcule $\frac{d}{dt} \frac{d}{dt} F(g(t), h(t))$.
- 2) Calcule $\frac{d}{dt} \frac{d}{dt} F(g(t_0), h(t_0))$ no caso em que:
 $t_0 = 6,$
 $g(6) = 7,$
 $h(6) = 8,$
 $g'(6) = 1,$
 $g''(t) = 0,$
 $h''(t) = 0,$
 $F(x, y) = a(x - 7)^2 - b(x - 7)(y - 8) + c(y - 8)^2.$

Cálculo 3
 PURO-UFF - 2019.2
 P1 - 18/outubro/2019 - Eduardo Ochs
 Respostas sem justificativas não serão aceitas.
 Diagramas muito ambíguos serão interpretados errado.
 Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 7.0)** Sejam:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= xy, \\ A &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq xy \leq 1 \}, \\ G(x, y) &= (\cos x)(\cos y). \end{aligned}$$

- a) **(0.5 pts)** Represente graficamente as curvas de nível da função F para $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$ e $z = -1$. Obs: quando você for representar várias curvas de nível num desenho só sempre deixe claro qual é cada uma!
- b) **(0.5 pts)** Faça o diagrama de numerozinhos para a função G . Dica: os pontos em que as contas são fáceis são os em que tanto x quanto y são múltiplos de $\pi/2$.
- c) **(1.5 pts)** Represente graficamente as curvas de nível da função G para $z = 0$, $z = 1$, $z = -1$.
- d) **(2.5 pts)** Represente graficamente a curva de nível da função G para $z = \frac{1}{2}$. Dica: represente como você acha que ela deve ser.
- e) **(0.5 pts)** Encontre máximos globais da função G em \mathbb{R}^2 .
- f) **(0.5 pts)** Encontre mínimos globais da função G em \mathbb{R}^2 .
- g) **(0.5 pts)** Represente graficamente o conjunto A .
- h) **(0.5 pts)** Dá pra usar o Teorema de Weierstrass pra garantir que a função G tem máximos globais e mínimos globais no conjunto A ?

2) **(Total: 1.5)** Seja $f(t) = (\cos t, t + \sin t)$. Encontre uma função $g(t)$ que seja uma aproximação de segunda ordem para $f(t)$ em $t_0 = \pi$.

3) **(Total: 1.5)** Sejam $F(x, y) = x^2y^3$ e $(x_0, y_0) = (10, 2)$. Dê a equação do plano tangente à superfície $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x, y) \}$ no ponto (x_0, y_0) . Dica: comece calculando o gradiente.

Mini-gabarito

(Incompleto e não revisado — pode ter erros de conta!!!):

- 1a) (na outra folha)
 1b) (na outra folha)
 1c) (na outra folha)
 1d) (na outra folha)
 1e) ...por exemplo os pontos $(0, 0)$, $(2\pi, 0)$, (π, π) (em que $z = 1$)
 1f) ...por exemplo os pontos $(\pi, 0)$, $(3\pi, 0)$, $(0, \pi)$ (em que $z = -1$)
 1g) A é a região fechada entre os eixos e $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$.
 1h) Não porque o conjunto A não é compacto (porque não é limitado).

$$\begin{aligned}
 2) \quad f(t) &= \overrightarrow{(\cos t, t + \sin t)}, \\
 f'(t) &= \overrightarrow{(-\sin t, 1 + \cos t)}, \\
 f''(t) &= \overrightarrow{(-\cos t, -\sin t)}, \\
 f(t_0 + \Delta x) &= f(t_0) + f'(t_0)\Delta x + \frac{f''(t_0)}{2}(\Delta x)^2 \\
 &= f(\pi) + f'(\pi)\Delta x + \frac{f''(\pi)}{2}(\Delta x)^2 \\
 &= (-1, \pi + 0) + \overrightarrow{(-0, 1 + (-1))}\Delta x + \frac{\overrightarrow{(-1, -0)}}{2}(\Delta x)^2 \\
 &= (-1, \pi) + \frac{\overrightarrow{(-1, -0)}}{2}(\Delta x)^2 \\
 &= (-1 - \frac{1}{2}(\Delta x)^2, \pi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad (x_0, y_0) &= (10, 2) \\
 F(x, y) &= x^2 y^3 & F(x_0, y_0) &= 800 \\
 F_x(x, y) &= 2xy^3 & F_x(x_0, y_0) &= 160 \\
 F_y(x, y) &= 3x^2 y^2 & F_y(x_0, y_0) &= 1200 \\
 \nabla F(x_0, y_0) &= \overrightarrow{(160, 1200)}
 \end{aligned}$$

Seja $G(x, y)$ a equação de plano tangente à superfície $z = F(x, y)$ em $(x, y) = (x_0, y_0)$.

$$\begin{aligned}
 \text{Então } G(x, y) &= F(x_0, y_0) + \nabla F(x_0, y_0) \cdot \overrightarrow{(x - x_0, y - y_0)} \\
 &= 800 + \overrightarrow{(160, 1200)} \cdot \overrightarrow{(x - x_0, y - y_0)} \\
 &= 800 + 160(x - x_0) + 1200(y - y_0) \\
 &= 800 + 160(x - 10) + 1200(y - 2)
 \end{aligned}$$

Obs: o meu critério para pontuar questões parcialmente certas é *bem* subjetivo! Eu perdô erros de conta se eu achar que se eles são pequenos, e eu considero que um erro de conta é “pequeno” se eu identifico ele rápido lendo o desenvolvimento da questão e *acho* que o aluno também poderia localizá-lo e consertá-lo rapidamente se revisasse a questão... eu acabo perdoando erros de conta muito mais facilmente se acho que o desenvolvimento da questão está razoavelmente bem escrito, e também se pouca gente acertou aquela questão.

Cálculo 3
 PURO-UFF - 2019.2
 P2 - 12/dezembro/2019 - Eduardo Ochs
 Respostas sem justificativas não serão aceitas.
 Contas fora do ponto base zeram a questão!
 Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) (Total: 6.0) Sejam

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x - (y - 1)^2, \\ H(x, y) &= x^2 + 4y^2 - 4, \\ D &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) \leq 0 \}, \\ L(x, y) &= F(x, y) - \lambda H(x, y). \end{aligned}$$

- (1.0 pts) Represente graficamente algumas curvas de nível de $F(x, y)$.
- (1.0 pts) Represente graficamente o conjunto D .
- (1.5 pts) Encontre os pontos $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3$ nos quais $(L_x, L_y, L_\lambda) = (0, 0, 0)$.
- (1.5 pts) Verifique que os pontos que você encontrou no item anterior são os pontos da fronteira de D em que ∇F é múltiplo de ∇H .
- (1.0 pts) Algum dos pontos que você obteve no item anterior é o máximo global de F em D ? Algum deles é o mínimo global? Porquê? Explique usando o que você descobriu nos itens anteriores.

2) (Total: 4.5) Sejam:

$$\begin{aligned} t_0 &= 5, \\ g(5) &= 6, \\ h(5) &= 7, \\ g'(5) &= 1, \\ h'(5) &= m, \\ g''(t) &= 0, \quad (\text{para todo } t \in \mathbb{R}) \\ h''(t) &= 0, \quad (\text{para todo } t \in \mathbb{R}) \\ F(x, y) &= 4(x - 6)^2 + \gamma(x - 6)(y - 7) + 9(y - 7)^2, \\ \alpha &= \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} F(g(t_0), h(t_0)). \end{aligned}$$

Será que o ponto $(g(t_0), h(t_0))$ é mínimo local da F ? Qual é o comportamento da F em torno deste ponto? Ela é um parabolóide, uma sela, ou o quê?...

- (2.0 pts) Calcule α .
- (1.0 pts) Suponha que $\gamma = 12$. Encontre o único valor de m que faz $\alpha = 0$.
- (1.0 pts) Suponha que $\gamma = 0$. Mostre que não existe $m \in \mathbb{R}$ com $\alpha = 0$.
- (0.5 pts) Suponha que m tenha o valor que você encontrou no item b. Represente graficamente a trajetória $(g(t), h(t))$ e indique nela os pontos com $t = 4$, $t = 5$ e $t = 6$.

Cálculo 3
 PURO-UFF - 2019.2 - Eduardo Ochs
 VR - 13/dez/2019
 Versão para quem perdeu a P1.
 Respostas sem justificativas não serão aceitas.
 Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) (**Total: 6.0**) Na P1 nós vimos como encontrar uma representação gráfica aproximada para as curvas de nível da função $G_{P1}(x, y) = (\cos x)(\cos y)$ na mão, sem usar calculadora. Agora vamos fazer o mesmo para a função $G(x, y) = G_{VR}(x, y) = (\sin x) + (\sin y)$, mas usando alguns truques diferentes.

Seja $\alpha = \pi/6 = 180^\circ/6 = 30^\circ$. Senos e cossenos de múltiplos de α — isto é, de números da forma $k\alpha$, onde $k \in \mathbb{Z}$ — são fáceis de calcular, e para muitos valores de k o resultado vai ser um número racional:

k	$k\alpha$	$\cos k\alpha$	$\sin k\alpha$
0	0°	$\sqrt{4}/\sqrt{4} = 1$	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$
1	30°	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$
	45°	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$
2	60°	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$
3	90°	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$	$\sqrt{4}/\sqrt{4} = 1$
4	120°	$-\sqrt{1}/\sqrt{4} = -1/2$	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$
	135°	$-\sqrt{2}/\sqrt{4}$	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$
5	150°	$-\sqrt{3}/\sqrt{4}$	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$
6	180°	$-\sqrt{4}/\sqrt{4} = -1$	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$

a) (**1.5 pts**) Faça um diagrama de numerozinhos para a função $G(x, y)$. Dica: use só pontos $x, y \in \frac{\pi}{6}\mathbb{Z}$, e ignore os pontos em que o resultado dá algo complicado... por exemplo, $G(\frac{\pi}{6}, 2\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$, então $(\frac{\pi}{6}, 2\frac{\pi}{6})$ é um ponto complicado. *O seu diagrama tem que ter pelo menos 20 pontos “simples”.*

a) (**2.0 pts**) Represente graficamente $\nabla G(x, y)$ em pelo menos 20 pontos “simples”. Obs: os pontos em que $\nabla G(x, y)$ tem ambas as componentes racionais são diferentes dos pontos em que $\nabla G(x, y)$ é racional! *O seu diagrama tem que ter pelo menos 20 vetores.*

c) (**2.5 pts**) Use o que você descobriu nos itens anteriores pra esboçar as curvas de nível de $z = G(x, y)$ para $z = 2$, $z = -2$, $z = 0$, $z = 1$, $z = -1$, $z = \frac{1}{2}$, $z = -\frac{1}{2}$.

2) (**Total: 2.0**) Seja $f(t) = (\cos t, 2 \sin t)$.

a) (**1.0 pts**) Escolha pelo menos 5 valores de t em $[0, \pi]$ em que as contas são fáceis e represente graficamente $f(t) + f'(t)$. Use isto para fazer um esboço da trajetória $f(t)$. Não esqueça de indicar o t associado a cada ponto da trajetória!

b) (**1.0 pts**) Encontre uma função $g(t)$ que seja uma aproximação de segunda ordem para $f(t)$ em $t_0 = \pi$.

3) (**Total: 2.0**) Sejam $F(x, y) = x^2\sqrt{y}$ e $(x_0, y_0) = (10, 4)$. Dê a equação do plano tangente à superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x, y)\}$ no ponto (x_0, y_0) . Dica: comece calculando o gradiente.

Cálculo 3
 PURO-UFF - 2019.2 - Eduardo Ochs
 VR - 13/dez/2019
 Versão para quem perdeu a P2.
 Respostas sem justificativas não serão aceitas.
 Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.
 Contas fora do ponto base anulam a questão!

1) **(Total: 6.0)** Sejam

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x - (y - 1)^2, \\ H(x, y) &= x^2 + 4y^2 - 4, \\ D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) \leq 0\}, \\ L(x, y) &= F(x, y) - \lambda H(x, y). \end{aligned}$$

- a) **(1.0 pts)** Represente graficamente algumas curvas de nível de $F(x, y)$.
 b) **(1.0 pts)** Represente graficamente o conjunto D .
 c) **(1.5 pts)** Encontre os pontos $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3$ nos quais $(L_x, L_y, L_\lambda) = (0, 0, 0)$. Aliás, tente encontrar estes pontos e mostre que equação de 4º grau você precisaria resolver pra encontrar os valores exatos pra eles.
 d) **(2.5 pts)** Encontre aproximações olhométricas para os pontos da fronteira de D em que ∇F é múltiplo de ∇H . Faça as contas com os pontos que você obteve no olho e verifique que nesses pontos os gradientes ∇F e ∇H são quase paralelos.
 e) **(1.0 pts)** Algum dos pontos que você obteve no item anterior é (uma aproximação para) um máximo global de F em D ? Algum deles é (uma aproximação para) um mínimo global? Porquê? Explique usando o que você descobriu nos itens anteriores.

2) **(Total: 4.5)** Sejam:

$$\begin{aligned} t_0 &= 5, \\ g(5) &= 6, \\ h(5) &= 7, \\ g'(5) &= 1, \\ h'(5) &= m, \\ g''(t) &= 0, \quad (\text{para todo } t \in \mathbb{R}) \\ h''(t) &= 0, \quad (\text{para todo } t \in \mathbb{R}) \\ F(x, y) &= 9(x - 6)^2 + \gamma(x - 6)(y - 7) + 4(y - 7)^2, \\ \alpha &= \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} F(g(t_0), h(t_0)). \end{aligned}$$

Será que o ponto $(g(t_0), h(t_0))$ é mínimo local da F ? Qual é o comportamento da F em torno deste ponto? Ela é um parabolóide, uma sela, ou o quê?...

- a) **(2.0 pts)** Calcule α .
 b) **(1.0 pts)** Suponha que $\gamma = 12$. Encontre o único valor de m que faz $\alpha = 0$.
 c) **(1.0 pts)** Suponha que $\gamma = 0$. Mostre que não existe $m \in \mathbb{R}$ com $\alpha = 0$.
 d) **(0.5 pts)** Suponha que m tenha o valor que você encontrou no item b. Represente graficamente a trajetória $(g(t), h(t))$ e indique nela os pontos com $t = 4$, $t = 5$ e $t = 6$.

Cálculo 3

PURO-UFF - 2019.2 - Eduardo Ochs

VS - 19/dez/2019

Contas fora do ponto base zeram a questão!

Desenhos muito ambíguos serão interpretados errado.

Respostas sem justificativas não serão aceitas.

Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

Seja $\alpha = \pi/6 = 180^\circ/6 = 30^\circ$. Senos e cossenos de múltiplos de α — isto é, de números da forma $k\alpha$, onde $k \in \mathbb{Z}$ — são fáceis de calcular, e para muitos valores de k o resultado vai ser um número racional:

k	$k\alpha$	$\cos k\alpha$	$\text{sen } k\alpha$
0	0°	$\sqrt{4}/\sqrt{4} = 1$	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$
1	30°	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$
	45°	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$
2	60°	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$
3	90°	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$	$\sqrt{4}/\sqrt{4} = 1$
4	120°	$-\sqrt{1}/\sqrt{4} = -1/2$	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$
	135°	$-\sqrt{2}/\sqrt{4}$	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$
5	150°	$-\sqrt{3}/\sqrt{4}$	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$
6	180°	$-\sqrt{4}/\sqrt{4} = -1$	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$

Em algumas das questões abaixo vou dizer que certos senos e cossenos são “muito fáceis” de calcular quando dão resultados inteiros, “fáceis” quando dão resultados racionais, e “difíceis” quando dão resultados irracionais. Por exemplo, $\cos 90^\circ$ é muito fácil; $\cos 60^\circ$ é fácil, mas $\text{sen } 60^\circ$ é difícil.

1) **(Total: 2.0)** Seja $P(t) = (g(t), h(t)) = (\cos t, \text{sen } 2t)$. Faça uma representação gráfica da trajetória $P(t)$ para t entre 0 e 2π . Dicas: comece representando $P(t) + P'(t)$ para todos os valores de t muito fáceis e “ligue os pontos”; anote ao lado de cada ponto o t associado a ele; use alguns ângulos só fáceis e alguns difíceis se você achar que eles podem te ajudar a fazer o desenho; use $\sqrt{2}/2 \approx 0.7$ use $\sqrt{3}/2 \approx 0.9$ se quiser. Use uma página inteira pro seu desenho final — ele tem que ficar bem claro e preciso.

2) **(Total: 2.0)** Seja $P(t) = (g(t), h(t)) = (\cos t, \text{sen } 2t)$ de novo.

a) **(0.5 pts)** Encontre uma função $Q(t)$ que seja uma aproximação de 2^{a} ordem para $P(t)$ em $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

b) **(1.0 pts)** Verifique que a sua $Q(t)$ obedece $P(t_0) = Q(t_0)$, $P'(t_0) = Q'(t_0)$, $P''(t_0) = Q''(t_0)$.

c) **(0.5 pts)** Reescreva a sua $Q(t)$ na forma $Q(t) = (at^2 + bt + c, dt^2 + et + f)$ — ou seja, sem a notação de ponto base.

3) **(Total: 3.5)** Sejam:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x - y, \\ H(x, y) &= x^2 + 4y^2 - 4, \\ D &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) \leq 0 \}, \\ L(x, y) &= F(x, y) - \lambda H(x, y). \end{aligned}$$

- a) **(1.0 pts)** Represente num gráfico só o conjunto D e algumas curvas de nível da função $F(x, y)$.
 b) **(0.5 pts)** Usando o gráfico anterior dê aproximações olhométricas para os pontos de máximo e mínimo da função $F(x, y)$ em D .
 c) **(1.5 pts)** Use o multiplicador de Lagrange para obter os pontos exatos de máximo e mínimo de $F(x, y)$ em D .
 d) **(0.5 pts)** Verifique que nos pontos que você obteve no item anterior os gradientes ∇F e ∇H são paralelos.

4) **(Total: 3.5)** Um dos problemas da P1 pedia pras pessoas descobrirem as curvas de nível da função $G(x, y) = (\cos x)(\cos y)$. Seja $H(x, y) = (\sin x) + (\sin y)$. Neste problema vamos tentar descobrir algumas curvas de nível da $H(x, y)$ na região D , onde

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 2\pi], y \in [0, \pi] \}.$$

- a) **(2.0 pts)** Faça um diagrama de numerozinhos para a função $H(x, y)$ na região D . Ele deve incluir todos os pontos $(x, y) \in D$ nos quais tanto $\sin x$ quanto $\sin y$ são muito fáceis e idealmente também todos os pontos nos quais tanto $\sin x$ quanto $\sin y$ são pelo menos fáceis (mas não necessariamente muito fáceis). Use uma página inteira pra versão final desse diagram pra poder fazer ele claro e detalhado.
 b) **(1.5 pts)** Use o diagrama que você obteve no item anterior pra fazer boas aproximações para as curvas de nível de $H(x, y) = z$ para $z = 1$, $z = \frac{1}{2}$, $z = 0$.

Cálculo 3

PURO-UFF - 2019.2 - Eduardo Ochs

VS - 20/dez/2019

Contas fora do ponto base zeram a questão!

Desenhos muito ambíguos serão interpretados errado.

Respostas sem justificativas não serão aceitas.

Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

Seja $\alpha = \pi/6 = 180^\circ/6 = 30^\circ$. Senos e cossenos de múltiplos de α — isto é, de números da forma $k\alpha$, onde $k \in \mathbb{Z}$ — são fáceis de calcular, e para muitos valores de k o resultado vai ser um número racional:

k	$k\alpha$	$\cos k\alpha$	$\sin k\alpha$
0	0°	$\sqrt{4}/\sqrt{4} = 1$	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$
1	30°	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$
	45°	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$
2	60°	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$
3	90°	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$	$\sqrt{4}/\sqrt{4} = 1$
4	120°	$-\sqrt{1}/\sqrt{4} = -1/2$	$\sqrt{3}/\sqrt{4}$
	135°	$-\sqrt{2}/\sqrt{4}$	$\sqrt{2}/\sqrt{4}$
5	150°	$-\sqrt{3}/\sqrt{4}$	$\sqrt{1}/\sqrt{4} = 1/2$
6	180°	$-\sqrt{4}/\sqrt{4} = -1$	$\sqrt{0}/\sqrt{4} = 0$

Em algumas das questões abaixo vou dizer que certos senos e cossenos são “muito fáceis” de calcular quando dão resultados inteiros, “fáceis” quando dão resultados racionais, e “difíceis” quando dão resultados irracionais. Por exemplo, $\cos 90^\circ$ é muito fácil; $\cos 60^\circ$ é fácil, mas $\sin 60^\circ$ é difícil.

1) **(Total: 2.0)** Seja $P(t) = (g(t), h(t)) = (\cos 2t, \sin t)$. Faça uma representação gráfica da trajetória $P(t)$ para t entre 0 e 2π . Dicas: comece representando $P(t) + P'(t)$ para todos os valores de t muito fáceis e “ligue os pontos”; anote ao lado de cada ponto o t associado a ele; use alguns ângulos só fáceis e alguns difíceis se você achar que eles podem te ajudar a fazer o desenho; use $\sqrt{2}/2 \approx 0.7$ use $\sqrt{3}/2 \approx 0.9$ se quiser. Use uma página inteira pro seu desenho final — ele tem que ficar bem claro e preciso.

2) **(Total: 2.0)** Seja $P(t) = (g(t), h(t)) = (\cos 2t, \sin t)$ de novo.

a) **(0.5 pts)** Encontre uma função $Q(t)$ que seja uma aproximação de 2ª ordem para $P(t)$ em $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

b) **(1.0 pts)** Verifique que a sua $Q(t)$ obedece $P(t_0) = Q(t_0)$, $P'(t_0) = Q'(t_0)$, $P''(t_0) = Q''(t_0)$.

c) **(0.5 pts)** Reescreva a sua $Q(t)$ na forma $Q(t) = (at^2 + bt + c, dt^2 + et + f)$ — ou seja, sem a notação de ponto base.

3) **(Total: 3.5)** Sejam:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 3x - y, \\ H(x, y) &= x^2 + 4y^2 - 4, \\ D &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) \leq 0 \}, \\ L(x, y) &= F(x, y) - \lambda H(x, y). \end{aligned}$$

- a) **(1.0 pts)** Represente num gráfico só o conjunto D e algumas curvas de nível da função $F(x, y)$.
 b) **(0.5 pts)** Usando o gráfico anterior dê aproximações olhométricas para os pontos de máximo e mínimo da função $F(x, y)$ em D .
 c) **(1.5 pts)** Use o multiplicador de Lagrange para obter os pontos exatos de máximo e mínimo de $F(x, y)$ em D .
 d) **(0.5 pts)** Verifique que nos pontos que você obteve no item anterior os gradientes ∇F e ∇H são paralelos.

4) **(Total: 3.5)** Um dos problemas da P1 pedia pras pessoas descobrirem as curvas de nível da função $G(x, y) = (\cos x)(\cos y)$. Seja $H(x, y) = (\sin x) + (\sin y)$. Neste problema vamos tentar descobrir algumas curvas de nível da $H(x, y)$ na região D , onde

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 2\pi], y \in [0, \pi] \}.$$

- a) **(2.0 pts)** Faça um diagrama de numerozinhos para a função $H(x, y)$ na região D . Ele deve incluir todos os pontos $(x, y) \in D$ nos quais tanto $\sin x$ quanto $\sin y$ são muito fáceis e idealmente também todos os pontos nos quais tanto $\sin x$ quanto $\sin y$ são pelo menos fáceis (mas não necessariamente muito fáceis). Use uma página inteira pra versão final desse diagram pra poder fazer ele claro e detalhado.
 b) **(1.5 pts)** Use o diagrama que você obteve no item anterior pra fazer boas aproximações para as curvas de nível de $H(x, y) = z$ para $z = 1$, $z = \frac{1}{2}$, $z = 0$.