Cálculo 2 - 2020.1

P2 (Segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Regras para a P2:

As questões da P1 serão disponibilizadas às 18:00 da quarta 02/dez/2020 para uma turma e às 13:00 da quinta 03/dez/2020 para a outra, e você deverá entregar as suas respostas escritas à mão até 48 horas depois do momento em que a prova foi disponibilizada para a sua turma na plataforma Classroom. Se o Classroom der algum problema mande também para este endereço de e-mail:

eduardoochs@gmail.com

Provas entregues após este horário não serão considerados.
Durante as 48 horas da prova nem o professor nem o monitor responderão perguntas sobre os assuntos da prova, mas você pode discutir com os seus colegas e até com as pessoas do grupo da outra turma... só que as respostas devem ser individuais.

Questão 1
(Total: 2.0)

a) **(0.5 pts)** Faça o gráfico da função $\operatorname{arcsen} x$. Lembre que o domínio dela é o conjunto $[-1, 1]$.

b) **(0.5 pts)** Reveja o vídeo sobre como provar que $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ que eu preparei pra aula sobre a integração por frações parciais. Adapte o método dele para o arcsen: calcule $\frac{d}{d\theta} \operatorname{arcsen} \operatorname{sen} \theta$ de dois jeitos diferentes, e use isto pra mostrar que

$$\operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen} \theta) \sqrt{1 - (\operatorname{sen} \theta)^2} = 1.$$

c) **(1.0 pts)** Calcule $\frac{d}{ds} \operatorname{arcsen} s$. Seja bem claro e detalhado na sua solução.

Questão 2
(Total: 2.0)

Faça algo parecido para calcular $\frac{d}{dt} \arctan t$. Aqui você vai precisar das identidades trigonométricas para tangente e secante do final dos slides sobre substituição trigonométrica.

Questão 3
(Total: 6.0)

a) **(2.5 pts)** Calcule

$$\int t^0 \sqrt{1+t^2}^{-2}\, dt$$

usando a fórmula do final dos slides sobre substituições trigonométricas que transforma $\int t^\alpha \sqrt{1+t^2}^\beta\, dt$ em algo mais fácil de integrar.

b) **(1.5 pts)** Calcule

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

c) **(2.0 pts)** Calcule

$$\int \frac{1}{4x^2+1}\, dx.$$

Gabarito parcial

1b) Neste vídeo

http://angg.twu.net/eev-videos/2020_deriv_ln.mp4

nós vimos esta demonstração:

$$\begin{array}{l} \text{Se } f(g(x)) = x \text{ então:} \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x = 1 \\ \qquad\quad \| \\ f'(g(x))g'(x) \end{array}$$

substituindo $f(u)$ por $\operatorname{arcsen} u$ e $g(x)$ por $\operatorname{sen} x$ na demonstração acima obtemos:

$$\begin{array}{l} \text{Se } \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(x)) = x \text{ então:} \\ \frac{d}{dx} \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(x)) = \frac{d}{dx} x = 1 \\ \qquad\quad \| \\ \operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen}(x)) \operatorname{sen}'(x) \end{array}$$

Então temos:

$$\text{Se } \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(\theta)) = \theta \text{ então } 1 = \operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen}(\theta))\operatorname{sen}'(\theta).$$

Quando $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ temos $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(\theta)) = \theta$, e aí:

$$\begin{array}{rcl} 1 &=& \operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen}(\theta))\operatorname{sen}'(\theta) \\ &=& \operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen}(\theta))\cos(\theta) \\ &=& \operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen}(\theta))\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}. \end{array}$$

A terceira igualdade acima só vale para certos valores de θ... mas quando θ está no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ temos $\cos(\theta) \ge 0$ e portanto $\cos(\theta) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$. A maioria dos livros "básicos" ignora que precisamos ter $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ — e eu não esperava que alguém mencionasse a condição $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ nesta prova.

1c) Se substituirmos θ por $\operatorname{arcsen} s$ em

$$1 = \operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen}(\theta))\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}$$

obtemos:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & \operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} s))\sqrt{1 - (\operatorname{sen} \operatorname{arcsen} s)^2} \\ & = & \operatorname{arcsen}'(s)\sqrt{1 - s^2} \end{array}$$

e daí:

$$\operatorname{arcsen}'(s) = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}.$$