Cálculo 2 - 2020.1

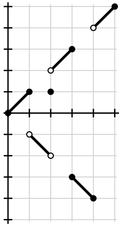
Aula 9: TFC1
(o primeiro Teorema Fundamental do Cálculo)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Funções formadas por segmentos

Uma função escada é uma função cujo gráfico é formado por um número finito de segmentos horizontais e de pontos isolados. Essa terminologia é padrão.

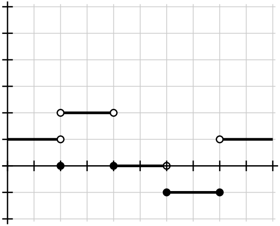
Nesta aula vamos usar algumas funções como a abaixo, cujo gráfico é formado por um número finito de segmentos *não necessariamente horizontais* e de pontos isolados. Acho que não há um termo padrão para funções deste tipo, então vou chamá-las de funções formadas por segmentos.

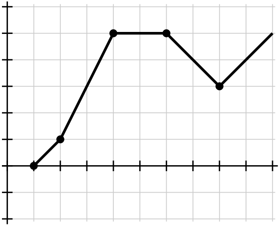
$f(x) \quad =$ 

Na aula passada nós conseguimos calcular a função

$$G(b) = \int_{x=1}^{x=b} g(x)\,dx$$

para a função $g(x)$ abaixo. Obtivemos:

$g(x) \quad =$ 

$G(b) \quad =$ 

...e vimos que:

1. $G(1) = \int_{x=1}^{x=1} g(x)\,dx = 0$.
2. $G'(x) = g(x)$ “sempre que isto faz sentido”, isto é, para todos os valores de x nos quais $G(x)$ é derivável.
3. $G'(x) = g(x)$ em todo x no qual $g(x)$ é contínua. Isto é uma condição mais forte que a 2.
4. $G(x)$ é contínua — inclusive nos valores de x nos quais as condições 2 e 3 não se aplicam.

Exercício 1.

a) Faça uma cópia no papel do gráfico da $g(x)$ do slide 3 e represente nele as áreas $\int_{x=1}^{x=3} g(x)\,dx$ e $\int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx$.

b) Agora visualize a diferença $\int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx - \int_{x=1}^{x=3} g(x)\,dx$, cancelando na região $\int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx$ a região $\int_{x=1}^{x=3} g(x)\,dx$. Represente graficamente esta diferença $\int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx - \int_{x=1}^{x=3} g(x)\,dx$ e verifique que ela é exatamente a área $\int_{x=3}^{x=4} g(x)\,dx$.

c) Calcule no olhômetro sem fazer nenhuma conta no papel o valor de cada subexpressão das igualdades abaixo e verifique que as duas igualdades são verdade. Lembre que você pode obter $G(3)$ e $G(4)$ pelo gráfico da G do slide 3.

$$\begin{aligned}
\int_{x=3}^{x=4} g(x)\,dx &= \int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx - \int_{x=1}^{x=3} g(x)\,dx \\
&= G(4) - G(3)
\end{aligned}$$

Exercício 2.

Dá pra generalizar o "$\int_{x=3}^{x=4} g(x)\,dx = G(4) - G(3)$" do final do exercício 1. O caso geral vai ser:

Se $F(b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ então $\int_{x=c}^{x=d} f(x)\,dx = F(d) - F(c)$,

e isto vai valer para qualquer função integrável f e quaisquer valores de a, c e d. Isto é um pouco mais difícil de interpretar quando a função f assume valores negativos em alguns trechos. Neste exercício você vai tentar interpretar isto nas nossas funções g e G em alguns casos complicados.

a) Visualize cada subexpressão de

$$\begin{aligned} \int_{x=7}^{x=8} g(x)\,dx &= \int_{x=1}^{x=8} g(x)\,dx - \int_{x=1}^{x=7} g(x)\,dx \\ &= G(8) - G(7) \end{aligned}$$

e descubra como lidar com a parte abaixo do eixo horizontal.

Integrais "na direção errada"

Até agora nós só lidamos com integrais da forma $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ nas quais tínhamos $a \leq b$... mas os matemáticos acham estas duas propriedades aqui

1. Se $F(b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ então $\int_{x=c}^{x=d} f(x)\,dx = F(d) - F(c)$
2. $\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx$

TÃO legais que eles decidiram que elas têm que valer sempre... e pra elas valerem sempre a gente precisa encontrar o significado "certo" para integrais da forma $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ onde $a > b$, isto é, integrais em que o intervalo de integração está "expresso na ordem errada".

Exercício 3.

Descubra o valor certo e depois a interpretação geométrica da integral "na direção errada" em cada uma das igualdades abaixo. Obs: ainda estamos usando as funções g e G do slide 3.

a) $\int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx + \int_{x=4}^{x=3} g(x)\,dx = \int_{x=1}^{x=3} g(x)\,dx$

b) $\int_{x=1}^{x=8} g(x)\,dx + \int_{x=8}^{x=7} g(x)\,dx = \int_{x=1}^{x=7} g(x)\,dx$

Agora leia as duas primeiras seções desta página:

https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_do_c%C3%A1lculo

e veja a figura da Parte 2 da demonstração.

Como nós estamos usando principalmente funções formadas por segmentos e que podem ser descontínuas nós vamos precisar de uma versão do TFC1 um pouco mais geral do que a dessa página da Wikipedia.

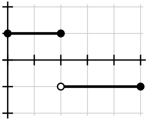
Digamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ seja uma função integrável.

Uma antiderivada para f é uma função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$ em todo $x \in [a, b]$ no qual a $f(x)$ é contínua.

Uma antiderivada contínua para f é uma função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$ em todo $x \in [a, b]$ no qual a $f(x)$ é contínua — e que além disso esta F é contínua. Ou seja, nos pontos x em que $f(x)$ não é contínua a $F(x)$ não precisa ser derivável, mas precisa ser contínua.

Exercício 4.

Seja $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ esta função:

$f(x) \quad =$ 

a) Encontre uma antiderivada contínua para f.

b) Encontre uma antiderivada para f que não é contínua.

c) Encontre uma antiderivada contínua para f que obedeça $F(0) = 0$.

d) Encontre uma antiderivada contínua para f que obedeça $F(1) = 0$.

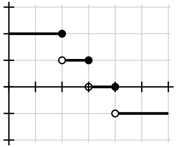
A versão do TFC1 que vamos usar é esta aqui:

Digamos que $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ seja integrável.
Seja $F : [a, c] \to \mathbb{R}$ uma antiderivada contínua de f
que obedeça $F(a) = 0$.
Seja $G : [a, c] \to \mathbb{R}$ a função $G(b) := \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$.
Então as funções F e G são iguais.

Ou seja, dá pra encontrar a função $G(b) := \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$
só encontrando uma antiderivada contínua!
Na aula passada nós levamos horas pra encontra a G,
mas agora quando a f é uma função escada simples
você deve ser capaz de encontrar uma antiderivada
contínua dela no olhômetro BEM rápido.

Exercício 5.

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esta função:

$f(x) \quad =$ 

Seja $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma antiderivada contínua de f que obedeça $F(1) = 0$.

a) Desenhe o gráfico da F no olhômetro, sem fazer contas.

Agora você tem dois jeitos de calcular $\int_{x=1}^{x=6} f(x)\,dx$, que tem que dar o mesmo resultado...

b) Calcule $\int_{x=1}^{x=6} f(x)\,dx$ pelo gráfico da f.

c) Calcule $\int_{x=1}^{x=6} f(x)\,dx$ pelo gráfico da F.

Exercício 6.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a nossa função preferida das primeiras aulas:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 - (x-2)^2 \\ &= 4 - (x^2 - 4x + 4) \\ &= -x^2 + 4x \end{aligned}$$

a) Encontre uma antiderivada para f.
b) Encontre uma antiderivada para f
   que obedeça $F(0) = 0$.
c) Use a sua resposta do item anterior para calcular

$$\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx.$$