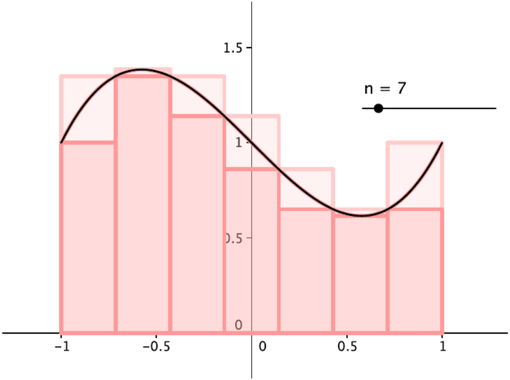
Cálculo 2 - 2020.1

Aulas 5 e 6: A definição de integral
como limite de somas de retângulos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Na última aula nós aprendemos como o "método do sup" nos dá a melhor aproximação por retângulos por cima para a integral de $y = f(x)$ e o "método do inf" nos dá a melhor aproximação por retângulos por baixo... a figura é esta (de novo!):



...e as definições formais são:

$$\begin{array}{rcl} [\mathrm{sup}] & = & \sum_{i=1}^{N} \sup(f([a_i, b_i])(b_i - a_i) \\ [\mathrm{inf}] & = & \sum_{i=1}^{N} \inf(f([a_i, b_i])(b_i - a_i) \end{array}$$

Vamos definir:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\int}_P f(x)\,dx & = & [\mathrm{sup}] \\ \underline{\int}_P f(x)\,dx & = & [\mathrm{inf}] \end{array}$$

pra podermos escrever isto, ao invés de $[\mathrm{inf}] \leq \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \leq [\mathrm{sup}]$:

$$\underline{\int}_P f(x)\,dx \leq \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \leq \overline{\int}_P f(x)\,dx$$

A nossa pronúncia para estas expressões novas vai ser:

$\overline{\int}_P f(x)\,dx$ é a "a aproximação da integral de $f(x)$ por retângulos por cima na particão P", ou "a integral por cima de $f(x)$ na partição P".

$\underline{\int}_P f(x)\,dx$ é a "a aproximação da integral de $f(x)$ por retângulos por baixo na particão P", ou "a integral por baixo de $f(x)$ na partição P".

Uma das pronúncias possíveis para $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ é "a integral de $f(x)$ no intervalo $[a,b]$". Lembra que uma partição P nos dá valores para a e b – a é o primeiro ponto de P e b é o último.

A interpretação geométrica de

$$\overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx$$

vai ser a região em rosa claro na figura do slide 2 – ou seja, um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado pela união dos retângulos em rosa claro.

A interpretação numérica da expressão acima vai ser a área desse subconjunto. Às vezes vamos escrevê-la como:

$$\mathsf{Área}\left(\overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx\right)$$

Exercício 1. Sejam f a nossa função preferida das aulas anteriores, isto é, $f(x) = 4 - (x-2)^2$, e $P = \{0, 1, 2, 3.5\}$.

a) Represente graficamente

$$\underline{\int}_P f(x)\,dx \le \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \le \overline{\int}_P f(x)\,dx$$

b) Represente graficamente o conjunto $\{\,(x, f(x)) \mid x \in [0, 3.5]\,\}$.
c) É verdade que

$$\{\,(x, f(x)) \mid x \in [0, 3.5]\,\} \subseteq \left(\overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx \right) \ ?$$

Exercício 2.

Sejam $P_2 = \{0, 1, 2\}$, $P_3 = \{0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2\}$, $P_4 = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2\}$.
Repare que cada P_N divide o intervalo $[0, 2]$ em N subintervalos iguais.
Sejam $D_N = \left(\overline{\int}_{P_N} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_N} f(x)\,dx \right)$
para $N = 2, 3, 4$.

a) Desenhe D_2 e D_3 de algum modo que deixe claro pro seu leitor que $D_2 \not\supseteq D_3$.

b) Desenhe D_2 e D_4 de algum modo que deixe claro pro seu leitor que $D_2 \supseteq D_4$. (Dica: use um gráfico só.)

c) Defina P_8 e D_8 seguindo os padrões acima.
Desenhe D_4 e D_8 de algum modo que deixe claro pro seu leitor que $D_4 \supseteq D_8$. (Dica: use um gráfico só.)

Repare que podemos escrever as partições
do intervalo $[a,b]$ em N subintervalos desta forma:

$$\begin{array}{ll}
\{a,b\} & \text{(um subintervalo)} \\
\{a, a+\frac{1(b-a)}{2}, b\} & \text{(dois subintervalos)} \\
\{a, a+\frac{1(b-a)}{3}, a+\frac{2(b-a)}{3}, b\} & \text{(três subintervalos)} \\
\{a, a+\frac{1(b-a)}{4}, a+\frac{2(b-a)}{4}, a+\frac{3(b-a)}{4}, b\} & \text{(quatro subintervalos)} \\
\vdots & \vdots \\
\{a, a+\frac{1(b-a)}{N}, a+\frac{2(b-a)}{N}, \ldots, b\} & \text{(N subintervalos)}
\end{array}$$

A a nossa sequência de partições preferida para o intervalo $[a,b]$
vai ser a sequência $(P_1, P_2, \ldots)$ na qual cada P_k divide
o intervalo $[a,b]$ em 2^k subintervalos iguais.

Exercício 3. Digamos que $[a,b] = [5,12]$ e que $(P_1, P_2, \ldots)$ seja a nossa sequência preferida de partições para este intervalo. Calcule os três primeiros pontos de P_4.

Uma primeira definição pra integral

Digamos que queremos calcular $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$.
Agora a função f é uma função qualquer,
não necessariamente a nossa f preferida,
e $[a,b]$ é um intervalo qualquer.
Seja $(P_1, P_2, \ldots)$ a nossa sequência preferida
de partições do intervalo $[a,b]$.

Todas estas desigualdades aqui são fáceis de visualizar:

$$\begin{array}{c}
\overline{\int}_{P_1} f(x)\,dx \geq \overline{\int}_{P_2} f(x)\,dx \geq \ldots \geq \lim_{k\to\infty} \overline{\int}_{P_k} f(x)\,dx \\
\hfill \begin{array}{c} \geq \\ \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \\ \geq \end{array} \\
\underline{\int}_{P_1} f(x)\,dx \leq \underline{\int}_{P_2} f(x)\,dx \leq \ldots \leq \lim_{k\to\infty} \underline{\int}_{P_k} f(x)\,dx
\end{array}$$

Uma primeira definição pra integral (2)

Todas estas desigualdades aqui são fáceis de visualizar:

$$\begin{array}{c}
\overline{\int}_{P_1} f(x)\,dx \geq \overline{\int}_{P_2} f(x)\,dx \geq \ldots \geq \lim_{k\to\infty} \overline{\int}_{P_k} f(x)\,dx \\
\hfill \vee\!| \hfill \\
\hfill \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \hfill \\
\hfill \vee\!| \hfill \\
\underline{\int}_{P_1} f(x)\,dx \leq \underline{\int}_{P_2} f(x)\,dx \leq \ldots \leq \lim_{k\to\infty} \underline{\int}_{P_k} f(x)\,dx
\end{array}$$

Nós vamos dizer que a função f é integrável no intervalo $[a, b]$ se os dois limites da direita dão o mesmo resultado.

Vamos encurtar a notação um pouquinho, definindo:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\int}_{[a,b]} f(x)\,dx & := & \lim_{k\to\infty} \overline{\int}_{P_k} f(x)\,dx \\
\underline{\int}_{[a,b]} f(x)\,dx & := & \lim_{k\to\infty} \underline{\int}_{P_k} f(x)\,dx
\end{array}$$

Uma primeira definição pra integral (3)

$$\begin{array}{lrcll} \text{Se} & \overline{\int}_{[a,b]} f(x)\,dx & = & \underline{\int}_{[a,b]} f(x)\,dx & \text{então} \\ & \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx & := & \underline{\int}_{[a,b]} f(x)\,dx. & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} \text{Se} & \overline{\int}_{[a,b]} f(x)\,dx & \neq & \underline{\int}_{[a,b]} f(x)\,dx & \text{então} \\ & \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx & := & \text{ERRO}, & \end{array}$$

e dizemos que f não é integrável neste intervalo.

Toda função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua é integrável em $[a, b]$.

Isto é meio óbvio visualmente – vamos ver um esboço de uma prova formal disso na próxima aula.

Uma função-escada e um exercício

Seja $g(x) = \begin{cases} 2 & \text{quando } x \leq 1, \\ 5 & \text{quando } 1 < x. \end{cases}$

Seja $[a,b] = [0,3]$.

Seja $D_k = \overline{\int}_{P_k} g(x)\,dx - \underline{\int}_{P_k} g(x)\,dx$,

onde $(P_1, P_2, \ldots)$ é a nossa sequência de partições preferida.

Exercício 4.

a) Desenhe o gráfico da função g.

b) Represente graficamente e calcule D_2.

c) Represente graficamente e calcule D_3.

d) Calcule D_{10}. Dicas: D_{10} tem um retângulo só.

Qual é a largura da sua base? Qual é a sua altura?

Qual é a sua área?

Uma função não integrável

Seja $h(x) = \begin{cases} 2 & \text{quando } x \in \mathbb{Q}, \\ 5 & \text{quando } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Seja $[a, b] = [0, 3]$.

Seja $D_k = \overline{\int}_{P_k} h(x)\,dx - \underline{\int}_{P_k} h(x)\,dx$,

onde $(P_1, P_2, \ldots)$ é a nossa sequência de partições preferida.

Exercício 5.

a) Desenhe o gráfico da função h.

b) Represente graficamente e calcule D_2.

c) Represente graficamente e calcule D_3.

d) Calcule D_{10}.

e) Calcule $\int_{x=a}^{x=b} h(x)\,dx$.