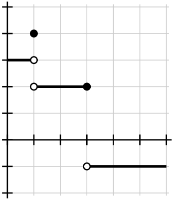
Cálculo 2 - 2020.1

Aulas 7 e 8: funções escada e como integrá-las

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Uma **função escada** é uma cujo gráfico é composto por um número finito de segmentos horizontais e um número finito – talvez zero – de pontos isolados. Por exemplo:

$f(x) \quad =$ 

No exercício 4 da aula passada – links:

`http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-def-integral.pdf`

a função g era uma função escada – e você deve ter sacado que $\lim_{k\to\infty} D_k = 0$, e portanto ela é integrável. Aliás, você deve ter sacado que qualquer função escada é integrável...

...e a integral de uma função escada $f(x)$ em qualquer intervalo, calculada pelos limites da aula passada, dá exatamente a área sob a curva dela naquele intervalo, que é fácil de calcular – até no olhômetro! – somando as áreas dos seus retângulos. Por exemplo, para a f do slide anterior temos:

$$\begin{array}{rcl}
\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx & = & 3\cdot(1-0)+2\cdot(3-1) \\
& = & 3+4 \\
& = & 7, \\
\int_{x=3}^{x=6} f(x)\,dx & = & -1\cdot(6-3) \\
& = & -3.
\end{array}$$

Os teoremas que vão nos permitir calcular integrais bem rápido – por exemplo, quanto é $\int_{x=0}^{x=4} 4-(x-2)^2\,dx$? Até agora ainda não sabemos! – são os dois "Teoremas Fundamentais do Cálculo", que a gente chama de TFC1 e TFC2. O TFC1 diz, a grossíssimo modo, que "a derivada da integral de f é a própria f", mas os detalhes dele são bem difíceis de entender, e o melhor modo de entendê-los é começando com funções escada.

Exercício 1.
Seja:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{quando } x < 2, \\ 0 & \text{quando } x = 2, \\ 2 & \text{quando } 2 < x < 4, \\ 0 & \text{quando } 4 \leq x < 6, \\ -1 & \text{quando } 6 \leq x \leq 8, \\ 1 & \text{quando } 8 < x, \end{cases}$$

a) Faça o gráfico da função g.
b) Calcule $\int_{x=1}^{x=7} g(x)\,dx$.
c) Calcule $\int_{x=1}^{x=7.2} g(x)\,dx$.

d) Seja $G(b) = \int_{x=1}^{x=b} g(x)\,dx$. Encontre uma fórmula para calcular $G(b)$ que valha para todos os valores de b no intervalo $(6, 8)$. Verifique se esta fórmula é compatível com os seus itens (b) e (c).

e) Calcule $\int_{x=1}^{x=3} g(x)\,dx$.

f) Calcule $\int_{x=1}^{x=3.2} g(x)\,dx$.

g) Encontre uma fórmula para calcular $G(b)$ que valha para todos os valores de b no intervalo $(2, 4)$. Verifique se esta fórmula é compatível com os seus itens (b) e (c).

h) Encontre uma fórmula para calcular $G(b)$ que valha para todos os valores de b no intervalo $(1, 2)$.

i) Encontre uma fórmula para calcular $G(b)$ que valha para todos os valores de b no intervalo $(4, 6)$.

j) Encontre uma fórmula para calcular $G(b)$ que valha para todos os valores de b no intervalo $(8, +\infty)$.

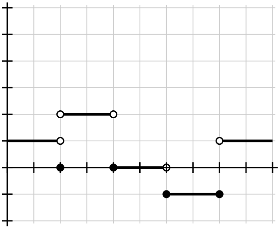
k) Junte os resultados que você obteve nos itens (d), (g), (h), (i), (j), numa definição para G por casos – ou seja, complete:

$$G(x) = \begin{cases} \ldots & \text{quando } 1 < x < 2, \\ \ldots & \text{quando } 2 < x < 4, \\ \ldots & \text{quando } 4 < x < 6, \\ \ldots & \text{quando } 6 < x < 8. \\ \ldots & \text{quando } 8 < x < +\infty. \end{cases}$$

l) Faça um gráfico para esta função G. Obs: o domínio dela é o conjunto $(1, 2) \cup (2, 4) \cup (4, 6) \cup (6, 8) \cup (8, +\infty)$.
m) Os limites laterais da G em $x \to 2$ são iguais? E em $x \to 4$? E em $x \to 6$? E em $x \to 8$?

n) Repare que o gráfico dessa sua G é formado por *segmentos de retas*. Descubra, olhando as inclinações dessas retas no gráfico, os valores de $G'(1.5)$, $G'(3)$, $G'(5)$, $G'(7)$, e compare-os com $g(1.5)$, $g(3)$, $g(5)$, $g(7)$.

Spoiler:

$g(x) \quad =$ 

$G(x) \quad =$