Cálculo 2 - 2020.1

Aulas 16 e 17: Frações parciais

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Neste vídeo nós vimos que $\frac{d}{dx} \ln x = 1/x$...

http://angg.twu.net/eev-videos/2020_deriv_ln.mp4

e aí começamos a fazer exercícios de integração...

Exercício 1.

EXERCÍCIOS:

a) $\int \frac{1}{3x} \, dx = ?$

b) $\int \frac{1}{3x+4} \, dx = ?$

c) $\int \frac{2}{3x+4} \, dx = ?$

REPARE QUE:

$$\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5} = \frac{2(x+5)}{(x+3)(x+5)} + \frac{4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2(x+5) + 4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2x+10 + 4x+12}{x^2+8x+15}$$

$$= \frac{6x+22}{x^2+8x+15}$$

A MAIORIA DOS PROGRAMAS DE "COMPUTER ALGEBRA" TEM FUNÇÕES QUE FAZEM A OPERAÇÃO ACIMA E A INVERSA DELA:

$$\left(\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5}\right) \underset{\substack{\text{"apart"} \\ \text{(DIFÍCIL)}}}{\overset{\substack{\text{"together"} \\ \text{(FÁCIL)}}}{\rightleftarrows}} \left(\frac{6x+22}{x^2+8x+15}\right)$$

Exercício 2.

EXERCÍCIOS:

CALCULE:

a) $\text{together}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)$

b) $\text{together}\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}\right)$

c) $\text{together}\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)$

Exercício 3.

EXERCÍCIO:

a) ENCONTRE EXPRESSÕES
PARA c, d, e, f QUE
FAÇAM ESTA FÓRMULA
SER VERDADE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f}$$

AS SUAS FÓRMULAS PARA c, d, e, f
NÃO PODEM CONTER "x".

b) USE A FÓRMULA QUE VOCÊ
ACABOU DE OBTER PARA ENCONTRAR
OS A, a, B, b TAIS QUE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{2x+3}{x^2-7+10}$$

Slogan: contas sem “vai um” podem ser traduzidas pra contas com polinômios.

O que mais nos interessa pra Frações Parciais é divisão com resto. Exemplo:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & 7 & 7 & 3 & 12 \\ \cline{5-5}
-2 & 4 & & & 231 \\ \cline{1-2}
 & 3 & 7 & & \\
- & 3 & 6 & & \\ \cline{2-3}
 & & 1 & 3 & \\
 & - & 1 & 2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 1 &
\end{array}
$$

$$2400 = 200 \cdot 12$$

$$360 = 30 \cdot 12$$

$$12 = 1 \cdot 12$$

$$2772 = 231 \cdot 12$$

$$2773 = 231 \cdot 12 + 1$$

...e tradução do exemplo para polinômios:

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3 + 7x^2 + 7x + 3 & x + 2 \\ \cline{2-2}
-(2x^3 + 4x^2) & 2x^2 + 3x + 1 \\ \cline{1-1}
3x^2 + 7x & \\
-(3x^2 + 6x) & \\ \cline{1-1}
1x + 3 & \\
-(1x + 2) & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
2x^3 + 4x^2 + 0x + 0 & = & (2x^2 + 0x + 0) \cdot (x + 2) \\
3x^2 + 6x + 0 & = & (3x + 0) \cdot (x + 2) \\
1x + 2 & = & 1 \cdot (x + 2) \\
2x^3 + 7x^2 + 7x + 1 & = & (2x^2 + 3x + 1) \cdot (x + 2) \\
2x^3 + 7x^2 + 7x + 3 & = & (2x^2 + 3x + 1) \cdot (x + 2) + 1
\end{array}
$$

Exercício 4.

Use estas idéias para integrar:

$$\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 3}{x+2}\,dx \quad = \quad ?$$

Exercício 5.

O que acontece nos casos em que "teria vai um"?

a) Tente fazer a divisão com resto de x^3 por $x+2$.
Mais precisamente, encontre um polinômios $R(x)$ e $Q(x)$ tais que $(x^3) = Q(x) \cdot (x+2) + R(x)$ e $R(x)$ é no máximo de grau 1.
Teste a sua resposta!

b) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ pelo método acima.
Teste a sua resposta derivando a sua antiderivada para $\frac{x^3}{x+2}$.

c) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ fazendo a substituição $u = x+2$.
Você deve obter o mesmo resultado que na (b).

d) Calcule $\int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}\,dx$ por frações parciais.

Dica importante

Lembre que uns dos meus slogans é
"eu só vou corrigir os sinais de igual"...
No slide 7 a igualdade mais importante é a da última linha.
Nós vamos usá-la assim, pra transformar a integral original em algo fácil de integrar:

$$\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 3}{x+2}\, dx$$

$$= \int \frac{(2x^2 + 3x + 1)\cdot(x+2) + 1}{x+2}\, dx$$

$$= \int \frac{(2x^2 + 3x + 1)\cdot\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} + \frac{1}{x+2}\, dx$$

$$= \int 2x^2 + 3x + 1 + \frac{1}{x+2}\, dx$$