

# Cálculo 2 - 2020.1

Aula 2: Integrais como somas de retângulos (1)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2020.1-C2.html>

## **Pra que a gente vai usar integrais e EDOs?**

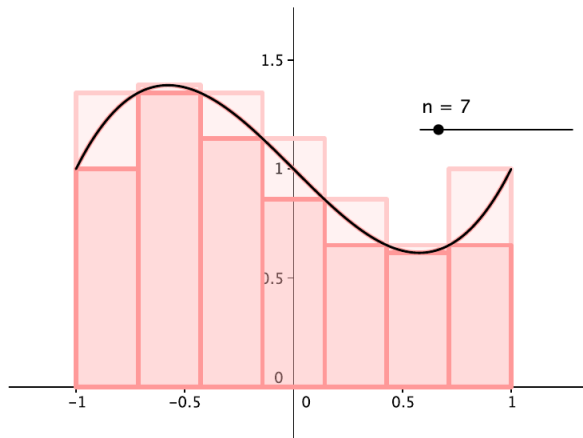
Pra ser bem honesto:

1. Pra passar em Cálculo 2
2. Em umas poucas matérias depois
3. Em quase nada depois que a gente crescer

MAAAAAS pra aprender a integrar e resolver EDOs nós vamos precisar aprender várias coisas que a gente vai usar zilhões de vezes depois do curso... e o que a gente vai ver hoje, que é *como interpretar certos somatórios como áreas e como visualizar essas áreas*, vai ser incrivelmente útil depois.

## Algumas figuras

Dê uma olhada nas notas de aula da Cristiane Hernández, linkadas na página do curso... por exemplo,



## Nossa função preferida

Seja  $f(x) = 4 - (x - 2)^2$ .

Isto é uma parábola com a concavidade pra baixo.

Verifique que:

$$f(0) = 4 - 4 = 0,$$

$$f(1) = 4 - 1 = 3,$$

$$f(2) = 4 - 0 = 4,$$

$$f(3) = 4 - 1 = 3,$$

$$f(4) = 4 - 4 = 0.$$

Além disso  $f'(x) = -2(x - 2)$ ,  $f'(1) = 2$ ,  $f'(3) = -2$ , e

a reta tangente à curva  $y = f(x)$  em  $x = 1$  tem coef. angular 2, e

a reta tangente à curva  $y = f(x)$  em  $x = 3$  tem coef. angular -2.

**Exercício 1:** use estas informações para traçar o gráfico de  $f(x)$  entre  $x = 0$  e  $x = 4$ .

**Dois jeitos de visualizar  $(x, f(x))$** 

Jeito burro:

Em  $x = 2.5$  temos

$$f(2.5) = 4 - (2.5 - 2)^2 = 4 - 0.5^2 = 4 - 0.25 = 3.75.$$

Encontre o ponto  $y = 3.75$  no eixo  $y$ .

Desenhe o ponto  $(2.5, 3.75)$ .

Jeito esperto/rápido:

Encontre no eixo  $x$  o ponto  $x = 2.5$ .

Suba esse ponto pra curva  $y = f(x)$  –  
você encontrou o ponto  $(2.5, f(2.5))$ !

## Mais exercícios

**Exercício 2.** Desenhe o gráfico da nossa função preferida (obs: sempre no intervalo entre  $x = 0$  e  $x = 4$ !) e desenhe sobre ele o retângulo “cuja área é  $f(0.5) \cdot (1.5 - 0.5)$ ”. Truque: isto é altura  $\cdot$  base, e a base vai de  $x = 0.5$  a  $x = 1.5$ .

**Exercício 3.** Desenhe em outro gráfico a nossa função preferida e sobre ela os retângulos da soma abaixo:  
 $f(0.5) \cdot (1.5 - 0.5) + f(1.5) \cdot (2 - 1.5) + f(2) \cdot (3 - 2) + f(3.5)(3.5 - 3)$

## Partições

**Informalmente** uma partição de um intervalo  $[a, b]$  é um modo de decompor  $[a, b]$  em intervalos menores consecutivos. Por exemplo,

$$[2, 7] = [2, 3.5] \cup [3.5, 4] \cup [4, 6] \cup [6, 7]$$

A definição “certa” é mais complicada... vamos vê-la daqui a pouco.  
Caso geral:

$$[a, b] = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \dots \cup [a_N, b_N],$$

onde:

$N$  é o número de intervalos,

$a = a_1, b = b_N$ , (“extremidades”)

$a_i < b_i$  para todo  $i$  em que isto faz sentido ( $i = 1, \dots, N$ )

$b_i = a_{i+1}$  para todo  $i$  e.q.i.f.s.; neste caso,  $i = 1, \dots, N - 1$

## Partições (2)

Um jeito prático de definir uma partição é usando uma tabela.  
Por exemplo, esta tabela

$i$	$a_i$	$b_i$
1	2	3.5
2	3.5	4
3	4	6
4	6	7

corresponde à partição de  $[2, 7]$  do slide anterior.

**Exercício 4.** Converta esta “partição”

$$[4, 12] = [4, 5] \cup [5, 6] \cup [6, 9] \cup [9, 10] \cup [10, 12]$$

numa tabela. Neste caso quem são  $a$ ,  $b$  e  $N$ ?



### Partições (3)

A definição **certa** de partição é a seguinte.

Digamos que  $P$  seja um subconjunto não-vazio e finito de  $\mathbb{R}$ , e que o menor elemento de  $P$  seja  $a$  e o maior seja  $b$ .

Então  $P$  é uma **partição** do intervalo  $[a, b]$ .

Exemplo: a partição  $P = \{2, 3.5, 4, 6, 7\}$  corresponde a:

$$[2, 7] = [2, 3.5] \cup [3.5, 4] \cup [4, 6] \cup [6, 7]$$

Pra fazer a tradução ponha os elementos de  $P$  em ordem e chame-os de  $b_0, \dots, b_N$ ; defina cada  $a_i$  como sendo  $b_{i-1}$  – por exemplo,  $a_1 = b_0$  – e encontre  $a$ ,  $b$ , e  $N$ .

**Exercício 5.** Converta a partição  $P = \{2.5, 3, 4, 6, 10\}$  para o formato tabela e para o formato  $[a, b] = [a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_N, b_N]$ .

## Partições definem muitas coisas implicitamente

Quando dizemos algo como “Seja  $P$  a partição  $\{2.5, 4, 6\}$ ” estamos criando um contexto no qual há uma partição “default” definida... e neste contexto vamos ter valores definidos para  $N$ ,  $a$ ,  $b$ , e para cada  $a_i$  e  $b_i$ . Por exemplo...

Seja  $P$  a partição  $\{2.5, 4, 6\}$ . Então

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N f(b_i) \cdot (b_i - a_i) &= \sum_{i=1}^2 f(b_i) \cdot (b_i - a_i) \\ &= f(b_1) \cdot (b_1 - a_1) + f(b_2) \cdot (b_2 - a_2) \\ &= f(4) \cdot (4 - 2.5) + f(6) \cdot (6 - 4)\end{aligned}$$

## Alguns exercícios de visualizar somas de retângulos...

**Exercício 6.** Seja  $f$  a nossa função preferida e seja  $P$  a partição  $\{0.5, 1, 2, 2.5\}$ . Represente num gráfico só a curva  $y = f(x)$  e os retângulos da soma  $\sum_{i=1}^N f(b_i) \cdot (b_i - a_i)$ .

**Exercício 7.** Seja  $f$  a nossa função preferida e seja  $P$  a mesma partição que no exercício anterior. Represente num gráfico só – separado do gráfico do exercício anterior!!! – a curva  $y = f(x)$  e os retângulos da soma  $\sum_{i=1}^N f(a_i) \cdot (b_i - a_i)$ .

**Exercício 8.** Usando a mesma função  $f$  e a mesma partição  $P$  dos exercícios anteriores, represente num outro gráfico a curva  $y = f(x)$  e os retângulos da soma  $\sum_{i=1}^N f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) \cdot (b_i - a_i)$ . Repare que  $\frac{a_i+b_i}{2}$  é o ponto médio do intervalo  $[a_i, b_i]$ , e é fácil encontrar pontos médios no olhómetro.

## Agora comparando com a Wikipedia

**Exercício 9.** Dê uma olhada na página

[https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma\\_de\\_Riemann](https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann)

da Wikipedia. Vamos tentar entender alguns pedaços dela.

Seja  $P$  a “partição do intervalo  $[0, 3]$  em 6 subintervalos iguais”. Tem um ponto em que a página da Wikipedia diz: “os pontos da partição serão...” – entenda as definições dela, descubra quem é  $\Delta x$  neste caso, e escreva quais são os pontos desta partição na linguagem da página da Wikipedia e na linguagem que eu usei nos slides.

Expand a fórmula da página da Wikipedia para a “soma média” neste caso. Expand também a nossa fórmula  $\sum_{i=1}^N f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) \cdot (b_i - a_i)$  e compare as duas expansões.

(Vamos ver o que são “ínfimos” e “supremos” na aula que vem)

## Trapézios

Tem dois modos diferentes da gente interpretar geometricamente  $\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$ :

- 1) como um retângulo de altura  $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ , ou
- 2) como um trapézio com vértices

$$(a, 0), (b, 0), (b, f(b)), (a, f(a))$$

**Exercício 10.** Sejam  $f$  a nossa função preferida e  $P$  a partição  $\{0, 1, 2\}$ . Desenhe num gráfico só a curva  $y = f(x)$  e os trapézios da soma:

$$\sum_{i=1}^N \frac{f(a_i) + f(b_i)}{2} (b_i - a_i)$$

(Veja as figuras da “Regra Trapezoidal” na página da Wikipedia)