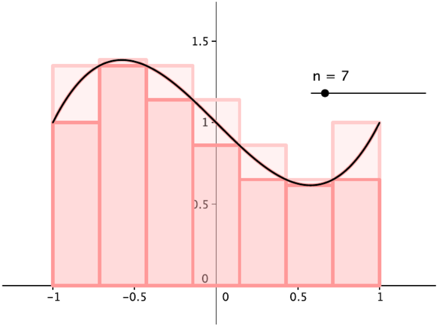
# Cálculo 2 - 2020.1

Aula 3: Integrais como somas de retângulos (2)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

## Aproximações por cima e por baixo

Uma das figuras na p.2 das notas da Cristiane Hernández é esta:




Ela mostra uma tentativa de calcular uma integral fazendo uma *aproximação por retângulos por baixo* e uma *aproximação por retângulos por cima* para $y = f(x)$ no intervalo entre $x = -1$ e $x = 1$. A curva $y = f(x)$ fica entre estas duas aproximações.

**Exercício 1.**
Sejam $g(x) = 5 - x$ e $P = \{1, 2, 4\}$.
Considere a expressão abaixo:

$$\sum_{i=1}^{N} g(b_i)(b_i - a_i) \leq \int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{N} g(a_i)(b_i - a_i) \qquad (*)$$

a) Represente graficamente o primeiro somatório e calcule-o.
b) Represente graficamente o segundo somatório e calcule-o.
c) Represente graficamente a integral $\int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx$ como a área sob a curva $y = g(x)$ entre $x = 1$ e $x = 4$ e calcule-a – lembre que vimos no final da aula passada como calcular áreas de trapézios.
d) Verifique que os dois '$\leq$'s em $(*)$ são verdade.
e) Represente os dois somatórios e a integral num gráfico só.

**Exercício 1 (continuação).**

f) O primeiro somatório está todo abaixo da curva $y = g(x)$? A curva $y = g(x)$ está toda abaixo do segundo somatório? Se "sim" e "sim" represente os dois somatórios e a integral num gráfico só fazendo uma figura parecida com a do slide 2, inclusive usando cores diferentes para a área sob a aproximação por baixo (o somatório da esquerda) e a aproximação por cima (o somatório da direita).

Nos próximos exercícios nós vamos encontrar modos de fazer aproximações por retângulos "por cima" e "por baixo". As nossas primeiras tentativas vão ser meio bugadas e vai ser preciso consertá-las.

Lembre que na aula passada nós vimos como visualizar vários somatórios diferentes, e os que apareceram no exercício 1 correspondem à "soma à direita" e a "soma à esquerda" desta página da Wikipedia:

`https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann`

**Algumas abreviações**

$$\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}] & = & \sum_{i=1}^N f(a_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{R}] & = & \sum_{i=1}^N f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{Trap}] & = & \sum_{i=1}^N \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[\mathrm{M}] & = & \sum_{i=1}^N f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\mathrm{min}] & = & \sum_{i=1}^N \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{max}] & = & \sum_{i=1}^N \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i)
\end{array}$$

Obs: todos os "métodos" acima, [L], [R], [Trap], [M], [min], e [max], aparecem na página da Wikipedia, mas com outros nomes e usando partições em que todos os subintervalos têm o mesmo comprimento!

**Exercício 2.** Seja $f$ a nossa função preferida (a da aula passada!) e $P$ a partição $P = \{1, 1.5, 2, 3, 4\}$.

a) Represente em um gráfico só a função $f$ e [M].

b) Represente em um gráfico só a função $f$ e [min].

c) Represente em um gráfico só a função $f$ e [max].

**Exercício 3.** Faça um gráfico como o do item (f) do exercício 1 para

$$[\mathrm{min}] \leq \int_{x=1}^{x=4} f(x)\,dx \leq [\mathrm{max}].$$

**Exercício 4.** Faça um gráfico como o do exercício anterior, mas agora usando $P = \{1, 1.5, 3, 4\}$. Desta vez um trecho do gráfico de $y = f(x)$ vai ficar acima do [max]!!!

**A imagem de um conjunto por uma função**

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{1, 1.5, 2, 3\} \\ B & = & \{\, (x, f(x)) \mid x \in A \,\} \\ & = & \{(1, f(1)), (1.5, f(1.5)), (2, f(2)), (3, f(3))\} \\ C & = & \{\, f(x) \mid x \in A \,\} \\ & = & \{f(1), f(1.5), f(2), f(3)\} \end{array}$$

Dá pra desenhar todos esses conjuntos num gráfico só bem rápido.

Instruções: desenhe o gráfico de $y = f(x)$; represente $A$ no eixo $x$; desenhe $B$ em $\mathbb{R}^2$ "levantando os pontos de $A$ para a curva de $y = f(x)$"; represente $C$ no eixo $y$ "projetando os pontos de $B$ no eixo $y$".

**Exercício 5.** Faça esse gráfico.

**Exercício 6.** Faça a mesma coisa, mas com $A = [1, 3.5]$, que é um conjunto infinito... agora o conjunto $C$ vai ser um intervalo. Qual?

## Um abuso de linguagem

A nossa função $f$ preferida é

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 4-(x-2)^2 \end{array}$$

O domínio dela é $\mathbb{R}$, e isso quer dizer que se ela receber qualquer argumento que não é um elemento de $\mathbb{R}$ ela deve dar erro...

Existe um truque tradicional que nos permite escrever a imagem de um conjunto por uma função de um jeito mais curto. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto,

$$f(A) = \{\, f(a) \mid a \in A \,\}$$

É como se estivéssemos definindo uma função $f$ nova a partir da $f$ original, e as duas tem o mesmo nome mas domínios disjuntos – a original só lida com argumentos que são números reais, e a nova só lida com argumentos que são conjuntos de números.

## Sup

A função $\mathsf{sup}$ é uma espécie de generalização do $\mathsf{max}$.

Vamos começar com um exemplo. No exercício 6 você "calculou" – por desenhos e olhômetro – $f([1,3.5])$, e você obteve um intervalo no eixo $y$. Sejam $A = [1,3.5]$ e $C = f(A)$. Seja

$$D = \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall c \in C.\, c \leq y \,\}.$$

**Exercício 7.** É verdade que $4 \in D$?
**Exercício 8.** É verdade que $5 \in D$?
**Exercício 9.** É verdade que $2 \in D$?
**Exercício 10.** É verdade que $+\infty \in D$?
**Exercício 11.** É verdade que $-\infty \in D$?
**Exercício 12.** Represente graficamente o conjunto $D$.
**Exercício 13.** Qual é o menor elemento de $D$?

## Sup (2)

A definição formal do sup é bem complicada...
Dê uma olhada nesta página da Wikipedia, como curiosidade:

`https://pt.wikipedia.org/wiki/Supremo_e_%C3%ADnfimo`

Quando $C \subseteq \mathbb{R}$ temos um procedimento pra calcular $\mathsf{sup}(C)$ que é equivalente à definição "oficial" complicadíssima que aparece na Wikipedia. Ele funciona assim: defina

$$D = \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall c \in C.\, c \leq y \,\}.$$

Este conjunto $D$ vai ter duas propriedades importantes:
1) se $d \in D$ então $[d, +\infty) \subseteq D$, e
2) $D$ tem um menor elemento.

O resultado de $\mathsf{sup}(C)$ vai ser o menor elemento de $D$.

**Sup e Inf**

A definição informal abaixo também funciona:

Se $C \subseteq \mathbb{R}$ então $\mathsf{sup}(C)$ é o menor elemento de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ que está "acima" de todos os elementos de $C$.

e, similarmente...

Se $C \subseteq \mathbb{R}$ então $\mathsf{inf}(C)$ é o maior elemento de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ que está "abaixo" de todos os elementos de $C$.

**Exercício 14.** Calcule:

a) $\mathsf{sup}(\{2,3,4\})$ e $\mathsf{inf}(\{2,3,4\})$

b) $\mathsf{sup}([2,4])$ e $\mathsf{inf}([2,4])$

c) $\mathsf{sup}((2,4))$ e $\mathsf{inf}((2,4))$

d) $\mathsf{sup}(\mathbb{R})$ e $\mathsf{inf}(\mathbb{R})$

e) $\mathsf{sup}(\emptyset)$ e $\mathsf{inf}(\emptyset)$

**Algumas abreviações (2)**

$$\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{R}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{Trap}] & = & \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[\mathrm{M}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\mathrm{min}] & = & \sum_{i=1}^{N} \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{max}] & = & \sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{inf}] & = & \sum_{i=1}^{N} \mathsf{inf}(f([a_i, b_i])(b_i - a_i) \\
[\mathrm{sup}] & = & \sum_{i=1}^{N} \mathsf{sup}(f([a_i, b_i])(b_i - a_i)
\end{array}$$

Os métodos [inf] e [sup] são novos...

Eles correspondem ao que a página da Wikipedia chama de “Soma de Riemann Inferior” e “Soma de Riemann Superior”.

## Uma versão "consertada" do exercício 4

**Exercício 15.** Seja $P = \{1, 1.5, 3, 4\}$. Faça um gráfico como o do item (f) do exercício 1 para

$$[\text{inf}] \leq \int_{x=1}^{x=4} f(x)\,dx \leq [\text{sup}].$$

e verifique que agora a curva $y = f(x)$ está entre [inf] e [sup].