Cálculo 2 - 2020.1

Aula 19: Substituição trigonométrica

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Primeiro exemplo (só o início)

$$\int s^\alpha \sqrt{1-s^2}^\beta \, ds =$$
$$\int (\mathrm{sen}\,\theta)^\alpha (\cos\theta)^\beta (\cos\theta)\, d\theta =$$
$$\int (\mathrm{sen}\,\theta)^\alpha (\cos\theta)^{\beta+1}\, d\theta$$

$$\left[\begin{array}{rl} s & = \mathrm{sen}\,\theta \\ \frac{ds}{d\theta} & = \cos\theta \\ ds & = \cos\theta \, d\theta \\ \sqrt{1-s^2} & = \sqrt{1-(\mathrm{sen}\,\theta)^2} \\ & = \sqrt{(\cos\theta)^2} \\ & = \cos\theta \end{array}\right]$$

Pra resolver isto você vai precisar da técnica que a gente viu na "Aula 18: Integrais de potências de senos e cossenos".

Exercício 1

CALCULE

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

E TESTE O SEU RESULTADO.

DICA: COMECE COM A SUBSTITUIÇÃO (TRIVIAL) $s = x$.

Como testar a sua integral?

Lembre que pra testar se uma igualdade como $\int f(x)\,dx = F(x)$ é verdade a gente "deriva os dois lados"... eu costumo escrever um teste destes assim,

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int f(x)\,dx & \overset{?}{=} & F(x) \\ f(x) & \overset{?}{=} & \frac{d}{dx}F(x) \end{array}$$

e aí eu calculo a derivada $\frac{d}{dx}F(x)$ usando '$=$'s sem '?'.
Se eu chegar a um resultado igual a $f(x)$ então concluo que os '$\overset{?}{=}$'s são verdade e se eu chegar a algo que é evidentemente diferente de $f(x)$ eu concluo que os '$\overset{?}{=}$'s são falsos.

Tem dois exemplos no próximo slide.

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx \overset{?}{=} \sqrt{1-x^2}$$

$$\begin{aligned} x\sqrt{1-x^2} &\overset{?}{=} \frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{d}{dx}(1-x^2)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-2x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx \overset{?}{=} (\operatorname{sen}\theta)^5(\cos\theta)^7$$

$$\begin{aligned} x\sqrt{1-x^2} &\overset{?}{=} \frac{d}{dx}\left((\operatorname{sen}\theta)^5(\cos\theta)^7\right) \\ &= ???? \end{aligned}$$

NÃO SABEMOS O JEITO CERTO DE FAZER ESTA DERIVADA!

Abreviações

A partir de agora nós às vezes vamos usar certas abreviações, como por exemplo "$s = \operatorname{sen}\theta$"... só que essas abreviações dão muita margem pra erro a não ser que a gente saiba testar muito bem o que a gente está fazendo...

O truque pra fazer esses testes é o seguinte. Vamos ter que definir duas linguagens diferentes — a "linguagem sem abreviações" e a "linguagem com abreviações" e pra testar se algo na "linguagem com abreviações" faz sentido nós vamos ter que traduzí-lo pra "linguagem sem abreviações" e ver se ele faz sentido lá.

Abreviações (2)

As contas do "primeiro exemplo" no slide 2 estão todas feitas na linguagem sem abreviações. Quando o s aparece ele é sempre uma outra variável, nova, e diferente da variável anterior, que é θ. Cada expressão que aparece ou é toda na variável s ou toda na variável θ, inclusive no bloquinho de substituições... exceto pela segunda linha dele, que é "$\frac{ds}{d\theta} = \cos\theta$", e que eu estou avisando desde o início que é uma gambiarra — esta linha deve ser interpretada como $\frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$".

Abreviações (3)

Outra coisa importante: no vídeo eu enfatizo bastante que nos bloquinhos de substituições que estamos usando para integração por substituição de variáveis a primeira linha é algo como "$v = expr$", onde v é uma variável nova e *expr* é uma *expressão na variável antiga*, e todas as outras linhas vão ser consequências da primeira. A gente vai fazer isso sempre — e aí pra conseguir resolver o exercício 1 você vai precisar de três bloquinhos de substituição separados...

- o primeiro começa com "$s = x$",
- o segundo começa com "$\operatorname{sen}\theta = s$". Alguns livros que fazem os detalhes com todo o cuidado mostram que esse passo na verdade é uma substituição "$\theta = \operatorname{arcsen} s$" disfarçada, e que isso é uma "substituição inversa"...

- o terceiro bloquinho de substituição começa ou com "$c = \cos\theta$" ou com "$s = \operatorname{sen}\theta$"... veja os slides da "Aula 18: Integrais de potências de senos e cossenos", em especial a dica no último slide.

Abreviações:

$c = \cos\theta$

$s = \operatorname{sen}\theta$

$t = \tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{s}{c}$

$z = \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{1}{c}$

$\boxed{c^2 + s^2 = 1}$

$z^2 = \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{c^2+s^2}{c^2} = \dfrac{c^2}{c^2} + \dfrac{s^2}{c^2} = 1 + t^2$

$\boxed{z^2 = 1 + t^2}$

$\Rightarrow \boxed{t^2 = z^2 - 1}$

$s^2 = 1 - c^2 \quad \Rightarrow \quad s = \sqrt{1-c^2}$

$c^2 = 1 - s^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{1-s^2}$

$z^2 = 1 + t^2 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{1+t^2}$

$t^2 = z^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{z^2-1}$

As explicações (de tudo até aqui) estão neste vídeo:

http://angg.twu.net/eev-videos/2020_C2_2020nov25_subst_trig_1.mp4

As páginas seguintes têm o que a gente precisa saber pra trabalhar com os outros dois tipos de substituições trigonométricas. Estou fazendo um vídeo sobre elas! Link em breve!

$$\boxed{\begin{array}{l}
z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} + \frac{s^2}{c^2} = 1+t^2 \\[6pt]
\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\,\frac{s}{c} = \frac{s_\theta c - s c_\theta}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2 \\[6pt]
\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\,\frac{1}{c} = \frac{1_\theta c - 1 c_\theta}{c^2} = \frac{s}{c^2} = \frac{1}{c}\,\frac{s}{c} = zt
\end{array}}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}
t = \tan\theta \\
\sqrt{1+t^2} = \sec\theta \\
dt = (\sec\theta)^2 d\theta
\end{array}\right]
\qquad
\left[\begin{array}{l}
z = \sec\theta \\
\sqrt{z^2-1} = \tan\theta \\
dz = (\sec\theta)(\tan\theta)\,d\theta
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{l}
t = \tan\theta \\
\sqrt{1+t^2} = \sec\theta \\
dt = (\sec\theta)^2 d\theta
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l}
\int t^\alpha \sqrt{1+t^2}^{\,\beta} dt \\
= \int (\tan\theta)^\alpha (\sec\theta)^\beta (\sec\theta)^2 d\theta \\
= \int (\tan\theta)^\alpha (\sec\theta)^{\beta+2} d\theta \\
= \int \frac{(\mathrm{sen}\,\theta)^\alpha}{(\cos\theta)^\alpha}\; \frac{1}{(\cos\theta)^{\beta+2}}\; d\theta \\
= \int (\mathrm{sen}\,\theta)^\alpha (\cos\theta)^{-\alpha-\beta-2} d\theta
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l}
z = \sec\theta \\
\sqrt{z^2-1} = \tan\theta \\
dz = (\sec\theta)(\tan\theta)\,d\theta
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l}
\int z^\alpha \sqrt{z^2-1}^{\,\beta} dz \\
= \int (\sec\theta)^\alpha (\tan\theta)^\beta (\sec\theta)(\tan\theta)\,d\theta \\
= \int (\sec\theta)^{\alpha+1} (\tan\theta)^{\beta+1} d\theta \\
= \int \frac{1}{(\cos\theta)^{\alpha+1}}\; \frac{(\mathrm{sen}\,\theta)^{\beta+1}}{(\cos\theta)^{\beta+1}}\; d\theta \\
= \int (\mathrm{sen}\,\theta)^{\beta+1} (\cos\theta)^{-\alpha-\beta-2} d\theta
\end{array}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} + \frac{s^2}{c^2} = 1+t^2 \\ &\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{s}{c} = \frac{s_\theta c - s c_\theta}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2 \\ &\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{1}{c} = \frac{1_\theta c - 1 c_\theta}{c^2} = \frac{s}{c^2} = \frac{1}{c}\frac{s}{c} = zt \end{aligned}}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left[\begin{aligned} t &= \tan\theta \\ \sqrt{1+t^2} &= \sec\theta \\ dt &= (\sec\theta)^2 d\theta \end{aligned}\right] \qquad \left[\begin{aligned} z &= \sec\theta \\ \sqrt{z^2-1} &= \tan\theta \\ dz &= (\sec\theta)(\tan\theta)\,d\theta \end{aligned}\right]$$

$$\begin{bmatrix} t = \tan\theta \\ \sqrt{1+t^2} = \sec\theta \\ dt = (\sec\theta)^2 d\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\int t^\alpha \sqrt{1+t^2}^{\,\beta} dt \\
&= \int (\tan\theta)^\alpha (\sec\theta)^\beta (\sec\theta)^2 d\theta \\
&= \int (\tan\theta)^\alpha (\sec\theta)^{\beta+2} d\theta \\
&= \int \frac{(\operatorname{sen}\theta)^\alpha}{(\cos\theta)^\alpha} \frac{1}{(\cos\theta)^{\beta+2}} d\theta \\
&= \int (\operatorname{sen}\theta)^\alpha (\cos\theta)^{-\alpha-\beta-2} d\theta
\end{aligned}$$

$$\int z^\alpha \sqrt{z^2-1}^{\,\beta}\,dz$$
$$= \int (\sec\theta)^\alpha (\tan\theta)^\beta (\sec\theta)(\tan\theta)\,d\theta$$
$$= \int (\sec\theta)^{\alpha+1} (\tan\theta)^{\beta+1}\,d\theta$$
$$= \int \frac{1}{(\cos\theta)^{\alpha+1}} \frac{(\operatorname{sen}\theta)^{\beta+1}}{(\cos\theta)^{\beta+1}}\,d\theta$$
$$= \int (\operatorname{sen}\theta)^{\beta+1} (\cos\theta)^{-\alpha-\beta-2}\,d\theta$$

$$\left[\begin{array}{l} z = \sec\theta \\ \sqrt{z^2-1} = \tan\theta \\ dz = (\sec\theta)(\tan\theta)\,d\theta \end{array}\right]$$