Cálculo 3 - 2020.1

Aula 20: conjuntos abertos e fechados em $\mathbb{R}^2$

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2020.1-C3.html

Introdução

Dê uma olhada por alto no capítulo 4 do Bortolossi, páginas 121–139. Só vai dar tempo da gente ver antes da P2 a parte sobre conjuntos abertos e fechados de $\mathbb{R}^2$ que é mais difícil das pessoas aprenderem sozinhas...

HOJE: INTRODUÇÃO A ABERTOS, FECHADOS E CONTINUIDADE!

O BORTOLOSSI TEM UM CAPÍTULO SOBRE ISSO - O CAP. 4.

O QUE A GENTE VAI VER HOJE E NA AULA QUE VEM É PREPARAÇÃO PRA VOCÊS ENTENDEREM O CAPÍTULO 4.

VAMOS PRECISAR DESTAS DEFINIÇÕES (EM $\mathbb{R}^2$):

$$B_\varepsilon(P) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{d((x,y),P)}_{\substack{\text{A DISTÂNCIA}\\ \text{ENTRE } (x,y)\\ \text{E } P}} < \varepsilon\}$$

A "BOLA ABERTA DE RAIO ε EM TORNO DE P"

$$\overline{B}_\varepsilon(P) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),P) \leq \varepsilon\}$$

A "BOLA FECHADA DE RAIO ε EM TORNO DO PONTO P"

EM $\mathbb{R}$ ESSAS BOLAS SÃO INTERVALOS:

$$B_\varepsilon(P) = \{x\in\mathbb{R} \mid d(x,P) < \varepsilon\}$$

$$\overline{B}_\varepsilon(P) = \{x\in\mathbb{R} \mid d(x,P) \leq \varepsilon\}$$

A DEFINIÇÃO DE CONJUNTO ABERTO USA BOLAS ABERTAS.

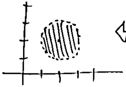
UM CONJUNTO $A\subset\mathbb{R}^n$ É ABERTO SE E SÓ SE:

$\forall P\in A.$
$\quad\exists\varepsilon>0.$
$\quad\quad B_\varepsilon(P)\subset A.$

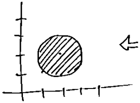
É MEIO DIFÍCIL ENTENDER ISSO, ENTÃO VAMOS FAZER UM MONTE DE EXERCÍCIOS PRA APRENDER A VISUALIZAR ESSAS COISAS.

DE VISUALIZAÇÃO DE CONJUNTOS EM $\mathbb{R}^2$.

Dica:

$B_1((2,2)) =$ 

A fronteira tracejada indica que os pontos da fronteira não pertencem ao conjunto $B_1((2,2))$

$\overline{B}_1((2,2)) =$ 

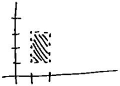
Fronteira não tracejada!

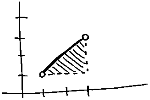
Exercícios:

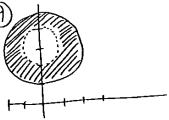
Represente graficamente:

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < y \leq 3\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < y \leq 3 \text{ e } 1 \leq x < 4\}$
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(1,2)) \leq 2\}$
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < d((x,y),(1,2)) \leq 2\}$
5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(1,2)) \leq 2 \text{ e } 1 < x\}$
6. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}$

Encontre alguma representação em notação de conjuntos para os conjuntos abaixo:

7. 

8. 

9. 

Sejam $C_1, C_2, \dots, C_9$ os conjuntos do problemas (1) até (9).

Nos próximos exercícios você vai ter que ser capaz de visualizar bolas sobre conjuntos que você já desenhou sem desenhar estas bolas.

Diga se cada uma das afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

(10) $B_{0.1}((0,2.5)) \subset C_1$

(11) $B_{0.5}((0,2.5)) \subset C_1$

(12) $\overline{B}_{0.5}((0,2.5)) \subset C_1$

(13) $B_{0.1}((1,3)) \subset C_2$

(14) $B_{0.1}((2.5,2.5)) \subset C_2$

(15) $B_1((2,2)) \subset C_3$

(16) $\overline{B}_1((2,2)) \subset C_3$

(17) $B_{0.5}((1,0.5)) \subset C_4$

(18) $B_{0.1}((0.5,2)) \subset C_5$

(19) $B_{0.001}((1.1,1.01)) \subset C_8$

Definição:

O interior de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Int}(A)$, é definido como:

$$\mathrm{Int}(A) = \{P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\ B_\varepsilon(P) \subset A\}.$$

Além disso, um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto quando $A \subset \mathrm{Int}(A)$.

Represente graficamente:

(20) $\mathrm{Int}(C_8)$

(21) $\mathrm{Int}(C_4)$

(22) $\mathrm{Int}(C_5)$

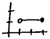
(23) $\mathrm{Int}(B_1((2,2)))$

Def: O fecho de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$, denotado por $\overline{A}$, é definido por:

$$\overline{A} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon > 0.\ B_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset\}$$

Representem graficamente:

(24) $\overline{C_8}$

(25) $\overline{D_1}$ onde $D_1 =$ 

(26) $\mathrm{Int}(D_1)$