Cálculo 3 - 2020.1

Aula 18: Derivadas parciais de ordem mais alta

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2020.1-C3.html

Às vezes você vai ver esse aviso aqui...

Contas fora do ponto base zeram a questão!

Se o nosso ponto base é $p_0 = (x_0, y_0)$ isso quer dizer que você vai ter que evitar ao máximo fazer expansões como:

$$h(x,y)(x - x_0) \quad \rightsquigarrow \quad h(x,y) \cdot x + h(x,y) \cdot (x_0)$$

E você vai ter que derivar esse $h(x,y)(x - x_0)$ assim:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial x}(h(x,y)(x - x_0)) & = & (\frac{\partial}{\partial x}h(x,y))(x - x_0) + h(x,y)\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) \\ & = & h_x(x,y)(x - x_0) + h(x,y). \end{array}$$

O mini-teste vai ter um aviso desses.
Isto vale também para $(y - y_0)$, $(x - x_0)^k$, e $(y - y_0)^k$.

Exercício 0.

Sejam:

$F(x,y) \;=\; (x-x_0)^4(y-y_0)^7$

e $(x_0,y_0)=(2,3)$.

Calcule:

$$\begin{array}{ccc}
F(x,y), & F_x(x,y), & F_{xx}(x,y), \\
F_y(x,y), & F_{xy}(x,y), & F_{xxy}(x,y), \\
F_{yy}(x,y), & F_{xyy}(x,y), & F_{xxyy}(x,y), \\
\\
F(x_0,y_0), & F_x(x_0,y_0), & F_{xx}(x_0,y_0), \\
F_y(x_0,y_0), & F_{xy}(x_0,y_0), & F_{xxy}(x_0,y_0), \\
F_{yy}(x_0,y_0), & F_{xyy}(x_0,y_0), & F_{xxyy}(x_0,y_0),
\end{array}$$

Dica: não substitua, por exemplo, $3^3 \cdot 7^2$ por 1323 –
se você deixar como "$3^3 \cdot 7^2$" vai dar pra ver os padrões,
e se você trocar isso por 1323 só alguém MUITO bom de conta
vai conseguir vê-los.

Exercício 1.
Seja:

$$\begin{array}{rcccccc}
F(x,y) & = & a_{00} & + & a_{10}(x-x_0) & + & a_{20}(x-x_0)^2 \\
& + & a_{01}(y-y_0) & + & a_{11}(x-x_0)(y-y_0) & + & a_{21}(x-x_0)^2(y-y_0) \\
& + & a_{02}(y-y_0)^2 & + & a_{12}(x-x_0)(y-y_0)^2 & + & a_{22}(x-x_0)^2(y-y_0)^2.
\end{array}$$

Calcule:

$$\begin{array}{ccc}
F(x,y), & F_x(x,y), & F_{xx}(x,y), \\
F_y(x,y), & F_{xy}(x,y), & F_{xxy}(x,y), \\
F_{yy}(x,y), & F_{xyy}(x,y), & F_{xxyy}(x,y), \\
F(x_0,y_0), & F_x(x_0,y_0), & F_{xx}(x_0,y_0), \\
F_y(x_0,y_0), & F_{xy}(x_0,y_0), & F_{xxy}(x_0,y_0), \\
F_{yy}(x_0,y_0), & F_{xyy}(x_0,y_0), & F_{xxyy}(x_0,y_0),
\end{array}$$

Dica: dá pra fazer essas contas de cabeça depois que você descobrir certos truques padrões. Faça as primeiras contas explicitamente no papel, e depois descubra esses padrões.

Exercício 2.
Seja

$$\begin{array}{rcccccc} G(x,y) & = & 4 & + & 5(x-2) & + & 6(x-2)^2 \\ & + & 7(y-3) & + & 8(x-2)(y-3) & + & 9(x-2)^2(y-3) \\ & + & 10(y-3)^2 & + & 11(x-2)(y-3)^2 & + & 12(x-2)^2(y-3)^2. \end{array}$$

Calcule: $\begin{array}{ccc} G(2,3), & G_x(2,3), & G_{xx}(2,3), \\ G_y(2,3), & G_{xy}(2,3), & G_{xxy}(2,3), \\ G_{yy}(2,3), & G_{xyy}(2,3), & G_{xxyy}(2,3), \end{array}$

(Dica: qual é o ponto base aqui?)

Isso vai ter montes de aplicações – por exemplo, os capítulos 11 e 12 do Bortolossi, que são sobre otimização, usam derivadas parciais de ordem maior que 1 e aproximações de Taylor em R^2 a beça...

O que a gente está fazendo hoje é começar a entender quais são as funções que são bem aproximadas pelas suas aproximações de Taylor (que vamos ver em breve!) – e a gente vai comecar por funções polinomiais.

(Ainda não revisei a partir daqui...)

3) Leia a seção sobre Teorema de Young no Bortolossi. Dá pra aplicar o teorema de Young nas funções F e G?

4) Calcule todas as derivadas de 2ª ordem da função F. (Dica: procure no Bortolossi a definição de ”derivadas de 2ª ordem!)

5) Calcule todas as derivadas de 3ª ordem da função $H(x,y) = x^2y_2$.

6) Especialize o Teorema 7.7 do Bortolossi para o caso $l = 1$, $m = 2$, $n = 1$. Obs: o livro tem alguns erros de digitação nesse teorema, e às vezes ele troca 'l's por 'k's e 'k's por 'l's; considere que todas as funções são de classe C^k. *Escreva o seu resultado como um corolário.* Dica: leia as páginas 252 a 263 se precisar tirar dúvidas sobre matriz jacobiana.

7) Use o seu corolário para calcular $\frac{d}{dt}F(g(t),h(t))$.

8) Use o que você obteve no (7) para calcular $\frac{d}{dt}F(g(t),h(t))$ no caso em que $F(x,y) = x^2y^3$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, $h(t) = e^{4t}$.

9) Calcule $\frac{d}{dt}((\operatorname{sen} t)^2(e^{4t})^3)$ usando métodos de Cálculo 1.