Cálculo 3 - 2020.1

Aulas 11 e 12: Alguns truques para visualizar superfícies

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C3.html

A última aula terminou com um exercício bem importante – o exercício 2 – que acho que ninguém conseguiu fazer durante a aula, todo mundo deixou pra depois... link:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C3-superficies-1.pdf

As expressões nos '...' em

$$dz = \ldots dx + \ldots dy$$

vão poder ser interpretadas de vários jeitos – por exemplo como derivadas parciais (cap.5 do Bortolossi), como derivadas direcionais (cap.8), ou como coeficientes do plano tangente (seção 7.2)... ou seja, estamos estudando exemplos que vão nos preparar pra entender um monte de conceitos importantes.

Vamos começar a aula de hoje vendo mais técnicas que vão nos ajudar a visualizar superfícies e que também vão nos ajudar com esses conceitos que vão vir depois.

Exercício 1

Sejam:

$$F(x,y) = \begin{cases} \sqrt{5^2 - x^2 - y^2} & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 \geq 0, \\ 0 & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 < 0, \end{cases}$$

e $(x_0, y_0) = (2, 4)$.

a) Faça o diagrama de numerozinhos para esta função F, com x e y assumindo todos os valores inteiros de -7 até 7. Use uma calculadora pra aproximar o z com precisão de dois dígitos – por exemplo, $F(1,0) = \sqrt{24} \cong 4.90$.

Obs: quando você descobrir certas simetrias você vai ver que você vai precisar calcular no máximo 12 raízes quadradas.

Exercício 1 (continuação)

Sejam:

$$
\begin{array}{rcl}
S & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y)\,\} \\
A_3 & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ \ z = 3\,\} \\
A_4 & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ \ z = 4\,\} \\
A_5 & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ \ z = 5\,\} \\
A_0 & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ \ z = 0\,\} \\
A_{-1} & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ \ z = -1\,\} \\
B & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ \ x = x_0\,\} \\
B' & = & \{\,(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = F(x_0,y)\,\} \\
C & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y),\ \ y = y_0\,\} \\
C' & = & \{\,(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = F(x,y_0)\,\} \\
D_3 & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 3\,\} \\
D_4 & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 4\,\}
\end{array}
$$

Exercício 1 (continuação)

b) O que são os conjuntos $S, \ldots, D_4$ definidos na página anterior? Para cada um deles visualize-o e depois tente desenhá-lo em 2D ou 3D de um jeito que ajudaria os seus colegas a entender que conjunto é este. Inspire-se nos desenhos das páginas 83 a 98 do capítulo 3 do Bortolossi. Complemente-os com explicações em português quando você achar que os desenhos sozinhos não são claros o suficiente.

c) Quais dos conjuntos $S, \ldots, D_4$ são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$?

d) Quais dos conjuntos $S, \ldots, D_4$ são curvas de nível?

e) Qual é a derivada da função $z = F(x_0, y)$ em $y = y_0$?

f) Qual é a derivada da função $z = F(x, y_0)$ em $x = x_0$?