Cálculo 3 - 2020.1

Aulas 3 e 4: Aproximações de 1ª e 2ª ordem

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C3.html

No final da última aula eu passei dois exercícios sobre "adivinhar" trajetórias a partir dos valores de $P(t)$ e $P'(t)$ para alguns valores de t. O exercício 3 era mais difícil que o 4 – no 3 a velocidade $P'(t)$ era zero em alguns dos pontos fáceis de calcular, e o melhor modo da gente descobrir o comportamento da trajetória $P(t)$ em torno daqueles pontos é usando o vetor aceleração, $P''(t)$, que é um dos assuntos de hoje.

Importante: por um erro de digitação eu acabei passando o exercício mais difícil antes do mais fácil, e acabei só mostrando o enunciado do 4 (mais fácil) pra algumas poucas pessoas por Telegram e só acrescentei ele ao PDF depois da aula... então:

Comece refazendo o exercício 3 da aula passada e fazendo o 4.

Polinômios e funções polinomiais

Alguns (poucos) livros distinguem *polinômios* de *funções polinomiais*. Um *polinômio de grau n em x* é uma expressão da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

onde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ são constantes, e uma *função polinomial em x* é uma função $g(x)$ para a qual existe um polinômio $f(x)$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo x. Por exemplo,

$$42(x-99)^{200} - 12(x-99)^6$$

é uma função polinomial em x mas não um polinômio em x, porque os coeficientes $a_{200}, \ldots, a_0$ do polinômio não são dados explicitamente.

Polinômios e funções polinomiais (2)

...maaaas repare que $42(x-99)^{200} - 12(x-99)^6$ é um polinômio em $x-99$, de grau 200 e com coeficientes $b_{200} = 42$, $b_6 = 12$, e zero nos outros índices. Mais formalmente,

$$\sum_{k=0}^{200} b_k(x-99)^k = 42(x-99)^{200} - 12(x-99)^6$$

quando $b_{200} = 42$, $b_6 = 12$, e $b_k = 0$ nos outros índices.

(Isto vai ser útil para séries de Taylor...)

Mini-revisão de séries de Taylor

Nos meus cursos de Cálculo 2 eu costumo fazer uma introdução rápida a Séries de Taylor pra convencer as pessoas de que a fórmula abaixo é verdade...

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad (*)$$

Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a Série de Taylor de f em no ponto 0 é:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad (**)$$

onde $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, etc.

Mini-revisão de séries de Taylor (2)

Sejam derivs e derivs_0 as seguintes operações:
$\mathsf{derivs}(f) = (f, f', f'', f''', \ldots)$
$\mathsf{derivs}_0(f) = (f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \ldots)$

Repare que $\mathsf{derivs}(f)$ retorna uma sequência infinita de funções e $\mathsf{derivs}(f)$ retorna uma sequência infinita de números.

Um exemplo: se $f(x) = ax^2 + bx + c$, então:

$$\begin{array}{rclcrcl}
f(x) &=& ax^2 + bx + c, & \qquad & f(0) &=& c, \\
f'(x) &=& 2ax + b, & & f'(0) &=& b, \\
f''(x) &=& 2a, & & f''(0) &=& 2a, \\
f'''(x) &=& 0, & & f'''(0) &=& 0,
\end{array}$$

$\mathsf{derivs}(f) = (ax^2 + bx + c,\ 2ax + b,\ 2a,\ 0, 0, 0, \ldots)$
$\mathsf{derivs}_0(f) = (c, b, 2a, 0, 0, 0, \ldots)$

Mini-revisão de séries de Taylor (3)

...e neste caso os termos do somatório são todos zero
a partir de $k = 3$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= \frac{f(0)}{0!} x^0 + \frac{f(0)'}{1!} x^1 + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \ldots \\ &= c + bx + ax^2 + 0 + \ldots \end{aligned}$$

E neste caso a igualdade da fórmula $(**)$ é verdade.

Mini-revisão de séries de Taylor (4)

Exercício 1 (pra você se convencer de que a fórmula $(**)$ vale sempre que a função f for um polinômio).

Seja $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$.

a) Calcule $\mathsf{derivs}(f)$.

b) Calcule $\mathsf{derivs}_0(f)$.

c) Expanda o somatório $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ e verifique que neste caso a igualdade $(**)$ é verdade (como no slide anterior).

Mini-revisão de séries de Taylor (5)

No caso geral – em que a f não é polinomial – a expansão do somatório na fórmula $(**)$ dá uma soma com infinitos termos não-zero... e isto às vezes é formalizado desta forma:

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right)$$

À medida que o N cresce a expressão $\sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ – a série de Taylor de f em $x = 0$ truncada até grau N – vira um polinômio com mais termos, e cada polinômio novo com mais termos que o anterior é uma aproximação melhor para a função f.

A série de Taylor truncada até grau N às vezes vai ser chamada de aproximação de grau N ou de polinômio de Taylor de grau N.

Mini-revisão de séries de Taylor (6)

Os detalhes são bem complicados – você vai ver todas as contas horríveis que demonstram as estimativas de erro numa matéria do Fábio – mas deve dar pra entender a idéia geral a partir dos desenhos e animações das páginas da Wikipedia.

Dê uma olhada em:

https://pt.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_de_Taylor
https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series
https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series#Approximation_error_and_convergence
https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor%27s_theorem

principalmente nas figuras que comparam aproximações de grau 1, 2, 3, etc. As páginas da Wikipedia em português têm menos figuras que as em inglês, então eu pus os links pras páginas em inglês também.

Mini-revisão de séries de Taylor (7)

O que vai importar pra gente agora é isto:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \approx & f(0) + f'(0)x \\ f(x) & \approx & f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \end{array}$$

A "aproximação de grau 1", $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$, dá uma aproximação bem razoável pro valor de $f(x)$ quando x é pequeno, e a "aproximação de grau 2", $f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$ dá uma aproximação melhor...

...só que daqui a pouco nós vamos adaptar isto para funções f que são "trajetórias", ou seja, que vão de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$. E além disso...

Séries de Taylor em torno de pontos que não são o 0

...e além disso vamos querer trabalhar com séries de Taylor em torno de pontos que não são o ponto 0 – e isso eu nunca mostro em Cálculo 2. As fórmulas são:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ f(x) & \approx & f(a) + f'(a)(x-a) \\ f(x) & \approx & f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \end{array}$$

Repare que as expressões à direita do '$=$' e dos '$\approx$' são polinômios em $(x-a)$! Uma definição nova:

$$\mathsf{derivs}_a(f) = (f(a), f'(a), f''(a), f'''(a), \ldots).$$

Algumas séries de Taylor famosas

Exercício 2. Calcule os primeiros termos de $\mathsf{derivs}(f)$ e $\mathsf{derivs}_0(f)$ para as funções abaixo:

a) $f(x) = e^x$
b) $f(x) = e^{2x}$
c) $f(x) = e^{ix}$
d) $f(x) = \cos x$
e) $f(x) = \operatorname{sen} x$
f) $f(x) = i \operatorname{sen} x$
g) $f(x) = \cos x + i \operatorname{sen} x$ (só o derivs_0)
e compare os itens (c) e (g).

Exercício 3. Descubra a série de Taylor de $f(x) = e^{2x}$ no ponto 0. Dica: veja a página da Wikipedia em português sobre Séries de Taylor...

`https://pt.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_de_Taylor`

Ela tem alguns exemplos numa seção chamada "Lista de série de Taylor de algumas funções comuns ao redor de $a = 0$ (Série de Maclaurin)".

Voltando a Cálculo 3...

Nas aulas anteriores nós aprendemos a desenhar *retas parametrizadas* e *parábolas parametrizadas*, e entendemos o que são o *vetor velocidade* e o *vetor aceleração* de uma trajetória...

Agora vamos ver como usar retas parametrizadas como uma aproximação de grau 1 – ou "de primeira ordem" – para uma trajetória e parábolas parametrizadas como aproximações de grau 2 – ou "de segunda ordem".

Repare que no Bortolossi essas idéias estão espalhadas pelo livro...
O vetor tangente aparece no cap.6, p.197,
o vetor aceleração aparece no cap.6, p.217,
polinômios de Taylor de ordem 2 aparecem no cap.11, p.371
polinômios de Taylor de ordem k aparecem no cap.11, p.376.

Aproximações de 1ª e 2ª ordem para trajetórias

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma trajetória.
Seja $t_0 \in \mathbb{R}$.
Definições (temporárias, vão ser melhoradas depois):

A *aproximação de 1ª ordem para f em $t = t_0$* é a reta parametrizada:

$$g(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$$

A *aproximação de 2ª ordem para f em $t = t_0$* é a reta parametrizada:

$$h(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t - t_0)^2$$

Vamos fazer alguns execícios pra aprender a desenhar e a visualizar essas aproximações e depois vamos ver que propriedades elas obedecem.

Exercício 4.

Sejam $f(t) = (t, \cos t)$ e $t_0 = 0$.

Represente graficamente num gráfico só:

a) O traço de $f(t)$ e os pontos $f(0)$, $f(\frac{\pi}{2})$, $f(\pi)$,

b) $f(t_0) + f'(t_0)$,

c) $f(t_0) + f''(t_0)$,

d) O traço de $g(t)$ – lembre que $g(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$ – e os pontos $g(t_0)$ e $g(t_0 + 1)$,

Exercício 5.

Sejam $f(t) = (t, \cos t)$ e $t_0 = \pi$.

Representegraficamente num gráfico só:

a) O traço de $f(t)$ e os pontos $f(0)$, $f(\frac{\pi}{2})$, $f(\pi)$,

b) $f(t_0) + f'(t_0)$,

c) $f(t_0) + f''(t_0)$,

d) O traço de $g(t)$ – lembre que $g(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$ – e os pontos $g(t_0)$ e $g(t_0 + 1)$,

e) Lembre que $h(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t - t_0)^2$. Represente graficamente os pontos $h(t_0)$, $h(t_0 + 1)$, $h(t_0 - 1)$, $h(t_0 + 2)$, $h(t_0 - 2)$.

f) (Mais difícil) Use o que você descobriu no item (e) para representar graficamente o traço de $h(t)$ – que vai ser uma parábola parametrizada.

Dica: o seu desenho não precisa ficar muito preciso – use $\pi \approx 3$..