Cálculo 3 - 2020.1

Aulas 7 e 8: dx, Δx e série de Taylor

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C3.html

Na aula passada nós fizemos alguns exercícios pra revisar a linguagem que o João Carlos Vieira Sampaio, da UFSCar, usou na "Aula 14" dele – que vamos tentar decifrar. Links:

https://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/calculo1_aula14.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C3-taylor-2.pdf

Nos nossos exercícios nós mantivemos as várias linguagens separadas – veja a próxima página. Nos itens [a], [b], [c], usamos a "notação de Lagrange", $f'(x)$; nos itens [a'], [b'], [c'] usamos a "notação de Leibniz", $\frac{dy}{dx}$, e no item [c"] começamos a usar *diferenciais*, como dx e dy, que o João Carlos explica na seção 14.2 da aula dele.

$$g(x) = \sqrt{x^2+f(x)}$$
$$= (x^2+f(x))^{1/2}$$
$$g'(x) = \tfrac{1}{2}(x^2+f(x))^{-\frac{1}{2}} \tfrac{d}{dx}(x^2+f(x))$$
$$= \tfrac{1}{2}(x^2+f(x))^{-\frac{1}{2}}(2x+f'(x))$$
$$= \frac{2x+f'(x)}{2\sqrt{x^2+f(x)}}$$

$$[a] = \left(g'(x) = \frac{2x+f'(x)}{2\sqrt{x^2+f(x)}} \right)$$

$$[b] = \left(0 = 2x+f'(x) \right)$$

$$[c] = \left(f'(x) = -2x \right)$$

$$z = \sqrt{x^2+y}$$
$$= (x^2+y)^{1/2}$$
$$\frac{dz}{dx} = \tfrac{1}{2}(x^2+y)^{-1/2} \tfrac{d}{dx}(x^2+y)$$
$$= \tfrac{1}{2}(x^2+y)^{-1/2}\left(2x+\tfrac{dy}{dx}\right)$$
$$= \frac{2x+\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{x^2+y}}$$

$$[a'] = \left(\frac{dz}{dx} = \frac{2x+\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{x^2+y}} \right)$$

$$[b'] = \left(0 = 2x+\frac{dy}{dx} \right)$$

$$[c'] = \left(\frac{dy}{dx} = -2x \right)$$

$$[c''] = \left(dx = -2x\,dx \right)$$

...mas faltou introduzirmos notações como x_0, x_1, y_0, y_1, Δx, Δy, etc, e juntarmos tudo isto com séries de Taylor e com as aproximações de 1ª e 2ª ordem, que em geral vamos usar na notação de baixo...

$$\begin{array}{rcl}
f(x) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\
f(x) & \approx & f(a) + f'(a)(x-a) \\
f(x) & \approx & f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
f(x_1) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(\Delta x)^k \\
f(x_1) & \approx & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\
f(x_1) & \approx & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}\Delta x^2
\end{array}$$

Exercício 1.

Importante: tente fazer tudo aqui sem calculadora exceto nos itens que dizem "usando a calculadora"!

Seja $y = f(x) = \sqrt{x}$.

a) Desenhe o gráfico de $y = f(x)$ entre $x = 0$ e $x = 9$.

b) Digamos que $x_0 = 4$ e $x_1 = 5$. Calcule y_0 e Δx. Represente graficamente y_1 e Δy sem calculá-los numericamente. Use no seu desenho as convenções da figura 14.3 do João Carlos Sampaio.

c) Encontre uma fórmula para calcular $\frac{dy}{dx}$.

d) Calcule $\frac{dy}{dx}$ para $x = x_0$.

e) Calcule dy no caso em que $x = x_0$ e $dx = \Delta x$.

f) Calcule y_1 e Δy usando a calculadora.

A partir de uma das fórmulas de Taylor podemos obter:

$$\begin{array}{rcl} f(x_1) & \approx & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ f(x_1) - f(x_0) & \approx & f'(x_0)\Delta x \\ y_1 - y_0 & \approx & f'(x_0)\Delta x \\ \Delta y & \approx & \frac{dy}{dx}\Delta x \end{array}$$

g) Em $f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ o lado esquerdo precisa de calculadora pra ser calculado e o lado direito é uma aproximação pra ele que pode ser calculada sem calculadora. Calcule $f(x_1)$ usando calculadora e compare os valores dos dois lados do '$\approx$'.

Exercício 2.

Refaça todos os itens do exercício 1 mas agora usando $x_1 = 1$.

Exercício 3.

Nos exercícios anteriores você aprender a calcular aproximações para o y_1 sem calculadora e o y_1 "de verdade" pra valores de x_1 dados... agora vamos generalizar isto. Seja:

$$\begin{aligned} g(x_1) &= f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \end{aligned}$$

a) Calcule $g(x_0)$ e $g'(x_0)$. Lembre que ainda estamos usando $x_0 = 4$.

b) Represente num gráfico só as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$. Obs: g é uma reta.

c) Calcule $f(0)$, $g(0)$, $f(9)$, $g(9)$, $f(-2)$, $g(-2)$. Obs: se você souber calcular $g(0)$, $g(9)$ e $g(-2)$ só pelo gráfico sem escrever as contas é melhor ainda.

Dá pra fazer algo parecido pra aproximações de 2ª ordem:

$$\begin{aligned}
g(x_1) &= f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \\
h(x_1) &= f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \tfrac{f''(x_0)}{2}\Delta x^2 \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2}(x_1 - x_0)^2
\end{aligned}$$

Vamos comparar $f(x_1)$ com $h(x_1)$ e ver que a $h(x_1)$ é uma aproximação melhor para a $f(x_1)$ do que $g(x_1)$... mas vai ser mais fácil visualizar isto – e vai ser mais útil pro que vem depois – se usarmos trajetórias.

Por enquanto as nossas fórmulas para aproximações de trajetórias vão ser estas aqui:

$$\begin{array}{rcl} P(x_1) & = & (x_1, f(x_1)) \\ Q(x_1) & = & P(x_0) + (x_1 - x_0)P'(x_0) \\ R(x_1) & = & P(x_0) + (x_1 - x_0)P'(x_0) + (x_1 - x_0)^2 \frac{P''(x_0)}{2} \end{array}$$

Exercício 4.

Nós ainda estamos usando $f(x) = \sqrt{x}$ e $x_0 = 4$.

Ainda é pra fazer tudo sem calculadora, exceto onde eu disser.

a) Represente graficamente o traço da trajetória P no intervalo $x_1 \in [0, 9]$ e indique os pontos $P(4)$, $P(3)$ e $P(5)$.

Exercício 4, continuação...

$$\begin{array}{rcl} P(x_1) & = & (x_1, f(x_1)) \\ Q(x_1) & = & P(x_0) + (x_1 - x_0)P'(x_0) \\ R(x_1) & = & P(x_0) + (x_1 - x_0)P'(x_0) + (x_1 - x_0)^2 \frac{P''(x_0)}{2} \end{array}$$

b) Calcule $P(4)$, $P'(4)$ e $\frac{P''(4)}{2}$.

c) Represente graficamente os pontos $Q(4)$, $Q(3)$ e $Q(5)$. Pra representar $Q(3)$ e $Q(5)$ **NÃO FAÇA CONTAS** – use o ponto $P(x_0)$ e o vetor $P'(x_0)$ e faça tudo direto no gráfico.

d) Represente graficamente os pontos $R(4)$, $R(4+1)$ e $R(4-1)$. Pra representar $R(4+1)$ e $R(4-1)$ **NÃO FAÇA CONTAS** – use o ponto $P(x_0)$ e os vetores $P'(x_0)$ e $\frac{P''(x_0)}{2}$ e faça tudo direto no gráfico. Depois represente graficamente $R(4)$, $R(4+2)$ e $R(4-2)$, também sem fazer contas.

e) Calcule sem calculadora os valores de $Q(4.1)$ e $R(4.1)$, e depois compare-os com o valor de $P(4.1)$ calculado usando calculadora.

Exercício 5

Refaça o exercício 3 da aula 2:

`http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C3-vetor-tangente.pdf`

a) Calcule $P'(t)$ e $P''(t)/2$.
b) Calcule $P(0)$, $P'(0)$ e $P''(0)/2$.
c) Calcule $P(\frac{\pi}{2})$, $P'(\frac{\pi}{2})$ e $P''(\frac{\pi}{2})/2$.

d) Usando a fórmula

$$R(x_0 + \Delta x) = P(x_0) + P'(x_0)\Delta x + \frac{P''(x_0)}{2}\Delta x^2$$

com $x_0 = \frac{\pi}{2}$, represente graficamente os pontos $R(x_0 + 0)$, $R(x_0 + 1)$, $R(x_0 - 1)$, $R(x_0 + 2)$, $R(x_0 - 2)$. Tente fazer o mínimo possível de contas — dá pra representar esses pontos direto no gráfico já que você já sabe $P(\frac{\pi}{2})$, $P'(\frac{\pi}{2})$ e $P''(\frac{\pi}{2})/2$.