

Cálculo 3 - 2020.1

Aula 2: Vetores tangentes em \mathbb{R}^2

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2020.1-C3.html>

Introdução

Leia as páginas 187 a 199 do capítulo 6 do Bortolossi.

Nesta aula nós vamos representar curvas parametrizadas pelo **traço** delas (p.188) com algumas anotações extras – como ‘ $t = 0$ ’, ‘ $t = 1$ ’, ‘ $f(\pi)$ ’ – sobre pontos delas... além disso também vamos desenhar vetores (vetores tangentes!) apoiados em alguns pontos, fazer anotações neles também, e vamos usar tudo isso pra tentar adivinhar (éééé!) o comportamento de uma curva esquisita.

Exercício 1

Sejam $P(t) = (4, 0) + t\overrightarrow{(0, 1)}$ e $Q(u) = (0, 3) + u\overrightarrow{(2, 0)}$.

Represente num gráfico só o traço de $P(t)$ e o de $Q(u)$.

Marque o ponto $P(0)$ e escreva ‘ $t = 0$ ’ do lado dele.

Faça o mesmo para os pontos $P(1)$ (‘ $t = 1$ ’) e $Q(0)$ e $Q(1)$ (‘ $u = 0$ ’ e ‘ $u = 1$ ’).

Seja r o traço de $P(t)$ e s o traço de $Q(u)$.

Seja X o ponto de interseção de r e s .

Quais são as coordenadas de X ?

Cada ponto de r está “associado” a um valor de t e cada ponto de s a um valor de u . Quais são os valores de t e u associados ao ponto X ? Chame-os de t_0 e u_0 e indique-os no seu gráfico – por exemplo, se $t_0 = 99$ e $u_0 = 200$ você vai escrever ‘ $t = 99$ ’ e ‘ $u = 200$ ’ do lado do ponto X .

Exercício 1 (continuação)

Faça o desenho sozinho – talvez você gaste alguns minutos pra decifrar todas as instruções – e depois compare o seu desenho com o dos seus colegas.

Exercício 2

Seja $P(t) = (\cos t, \sin t)$.

Represente num gráfico só:

- 1) o traço de $P(t)$,
- 2) $P(\frac{\pi}{2}) + P'(\frac{\pi}{2})$, escrevendo ' $P(\frac{\pi}{2})$ ' ao lado do ponto e ' $P'(\frac{\pi}{2})$ ' ao lado da seta,
- 3) Idem para estes outros valores de t : $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi$.
- 4) Seja $Q(u) = P(\pi) + uP'(\pi)$. Desenhe o traço de $Q(u)$ e anote ' $Q(0)$ ' e ' $Q(1)$ ' nos pontos adequados.
- 5) O traço de $Q(u)$ é uma reta tangente ao traço de $P(t)$ no ponto $P(\pi)$? Encontre no livro ou no resto da internet uma definição formal de reta tangente e descubra se isto é verdade ou não.

Exercício 3

Seja $P(t) = (\cos 2t, \sin t)$.

Represente graficamente $P(t) + P'(t)$ para os seguintes valores de t : $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{2}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \dots, 2\pi$.

Faça as anotações adequadas nos seu pontos e vetores pra lembrar qual é o t associado a cada um.

Tente usar as informações deste gráfico pra desenhar o traço de $P(t)$. Isto não é nada óbvio – se inspire nas figuras das páginas 208 e 209 do capítulo 6 do Bortolossi e tente conseguir uma hipótese razoável.

Você pode pensar que $P(t)$ é a posição do Super Mario Kart no instante t e $P'(t)$ é o *vetor velocidade* dele no instante t (lembre que um vetor tem “direção”, “orientação” e “módulo”!)... você só sabe a posição e a velocidade dele em alguns instantes, isto é, em alguns valores de t , e você vai ter que encontrar uma aproximação razoável, olhométrica, pra

pista onde ele está correndo.

Exercício 4

Seja $P(t) = (\cos t, \sin 2t)$.

Represente graficamente $P(t) + P'(t)$ para os seguintes valores de t : $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{2}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \dots, 2\pi$.

Faça as anotações adequadas nos seus pontos e vetores para lembrar qual é o t associado a cada um.

Tente usar as informações deste gráfico para desenhar o traço de $P(t)$. Isto não é nada óbvio – se inspire nas figuras das páginas 208 e 209 do capítulo 6 do Bortolossi e tente conseguir uma hipótese razoável.

Obs: este exercício é bem mais fácil do que o 3! Eu deveria ter apresentado ele antes do outro, mas acabei trocando a ordem por um erro de digitação...