Cálculo 2 - 2020.2

P1 (primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

As regras e dicas são as mesmas dos mini-testes:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT1.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT2.pdf

exceto que a prova vai ser disponibilizada às 17:00 do dia 15/abril/2021 e deve ser entregue até as 20:00 do dia 16/abril/2021.

Questão 1
(Total: 2.5pts)

Sejam:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \le 1, \\ 2 & \text{se } 1 < x, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \le 1, \\ 2x & \text{se } 1 < x. \end{cases}$$

a) Desenhe os gráficos das funções $f(x)$ e $F(x)$.
b) É verdade que $F'(x) = f(x)$?
c) É verdade que F é uma primitiva de f?
d) É verdade que $\displaystyle\int_{x=0}^{x=2} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=0}^{x=2}$?

Questão 2

(Total: 2.5pts)

Toda integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variável (ou: "por uma sequência de integrações por substituição") pode ser resolvida por uma mudança de variável só. Vocês viram isso no mini-teste: a integral dele podia ser resolvida usando as duas mudanças de variável $[u = \sqrt{x}]$ e $[v = 2u + 3]$ ou usando só $[w = 2\sqrt{x} + 3]$.

Resolva a integral abaixo de dois jeitos diferentes:

$$\int \frac{3\cos\left(2 + \sqrt{3x+4}\right)}{2\sqrt{3x+4}}\,dx$$

a) por várias mudanças simples de variável,

b) por uma mudança de variável só.

Questão 3
(Total: 2.5pts)

Um dos exercícios dos slides de frações parciais pedia pra vocês integrarem $\int \frac{1}{3x}\,dx$. Tem dois jeitos de fazer essa conta, um começando com $\int \frac{1}{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,dx$ e outro começando com a substituição $[u = 3x]$, e os dois dão resultados diferentes. Faça as contas, entenda os detalhes, e explique o porquê desses dois resultados diferentes imaginando que você está explicando pra alguém que acabou de aprender integração por substituição mas ainda não tem muita prática.

Questão 4

(Total: 2.5pts)

Integre

$$\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,d\theta$$

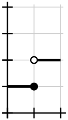
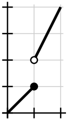
e teste a sua resposta.

Dica: use um dos jeitos de integrar potências de senos e cossenos e depois use a regra da potência.

Gabarito

(incompleto)

Questão 1: gabarito

a) $f(x) =$  $F(x) =$ 

b) Isto é falso em $x = 1$: $f(1) = 1$ mas $F'(1)$ não existe.

c) Não. Veja a definição:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-escadas.pdf#page=16

d) Não: $3 = \displaystyle\int_{x=0}^{x=2} f(x)\,dx \neq F(x)\Big|_{x=0}^{x=2} = 4.$

Questão 2: gabarito

$$\begin{array}{ll}
\int \frac{3\cos\left(2+\sqrt{3x+4}\right)}{2\sqrt{3x+4}}\,dx & \left[\begin{array}{c} u=3x \\ \frac{du}{dx}=3 \\ du=3\,dx \\ dx=\frac{1}{3}\,du \end{array}\right] \\
= \int \frac{\cos\left(2+\sqrt{u+4}\right)}{2\sqrt{u+4}}\,du & \\
= \int \frac{\cos\left(2+\sqrt{v}\right)}{2\sqrt{v}}\,dv & \left[\begin{array}{c} v=u+4 \\ du=dv \end{array}\right] \\
= \int \cos\left(2+w\right)dw & \left[\begin{array}{c} w=\sqrt{v} \\ \frac{dw}{dv}=\frac{1}{2}v^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{v}} \end{array}\right] \\
= \int \cos y\,dy & \left[\begin{array}{c} y=2+w \\ dy=dw \end{array}\right] \\
= \operatorname{sen} y & \\
= \operatorname{sen}\left(2+w\right) & \\
= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{v}\right) & \\
= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{u+4}\right) & \\
= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{3x+4}\right) &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\int \frac{3\cos\left(2+\sqrt{3x+4}\right)}{2\sqrt{3x+4}}\,dx & \\
= \int \cos u\,du & \left[\begin{array}{c} u=2+\sqrt{3x+4} \\ \frac{du}{dx}=\frac{3}{2\sqrt{3x+4}} \end{array}\right] \\
= \operatorname{sen} u & \\
= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{3x+4}\right) &
\end{array}$$

Questão 3: gabarito

$$\begin{array}{l} \int \frac{1}{3x}\,dx \\ = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{3}\,du \\ = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u}\,du \\ = \frac{1}{3} \ln u \\ = \frac{1}{3} \ln(3x) \end{array} \quad \begin{bmatrix} u = 3x \\ x = \frac{1}{3}u \\ dx = \frac{1}{3}du \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \int \frac{1}{3x}\,dx \\ = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x}\,dx \\ = \frac{1}{3} \ln x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{3} \ln(3x) \\ = \frac{1}{3}((\ln 3) + (\ln x)) \\ = (\frac{1}{3} \ln 3) + (\frac{1}{3} \ln x) \end{array}$$

As duas integrais que obtivemos para $\frac{1}{3x}$ diferem por uma constante.

Questão 4: gabarito

$$\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,d\theta =$$
$$\int \frac{1}{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta\,d\theta =$$
$$\int \frac{1}{c}(-1)\,dc =$$
$$-\int \frac{1}{c}\,dc =$$
$$-\ln|c| =$$
$$-\ln|\cos\theta|$$

$$\left[\begin{array}{l} c = \cos\theta \\ \frac{dc}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\,d\theta = (-1)\,dc \end{array}\right]$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,d\theta =$$
$$\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{(\cos\theta)^2}\cos\theta\,d\theta =$$
$$\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}\cos\theta\,d\theta =$$
$$\int \frac{s}{1-s^2}\,ds = \ldots$$:(

$$\left[\begin{array}{l} s = \operatorname{sen}\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ \cos\theta\,d\theta = ds \end{array}\right.$$