# Cálculo 2 - 2020.2

P2 (segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

As regras e dicas são as mesmas dos mini-testes e da P1:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT1.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT2.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf

exceto que a prova vai ser disponibilizada às 21:00 do dia 29/abril/2021 e deve ser entregue até as 22:00 do dia 30/abril/2021.

**Questão 1.**
**(Total: 6.5+1.5 pts)**

Na parte do curso sobre substituição trigonométrica — link:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-subst-trig.pdf

você aprendeu a demonstrar fórmulas de integração, a dar nomes pra elas, a criar uma "tabela de integrais" sua só com fórmulas que você sabe demonstrar, e a usar as fórmulas da sua tabela de integrais. Agora você vai demonstrar duas fórmulas sobre substituição trigonométrica que não vimos nas aulas e que vão ser usadas algumas vezes nos cursos de Física.

Lembre que várias fórmulas de integração importantes não resolvem integrais, só convertem elas pra integrais mais fáceis de resolver. Várias fórmulas do slides de substituição trigonométrica são assim, e as que você vai demonstrar aqui também vão ser.

**Questão 1 (cont.)**

a) **(2.0 pts)** Demonstre uma fórmula como esta aqui,

$$\int x^\alpha \sqrt{a^2x^2 - 1}^\beta \, dx = k \int u^\alpha \sqrt{u^2 - 1}^\beta \, du$$

e dê um nome para ela. Você vai ter que descobrir qual é a substituição certa e qual é o valor da expressão $k$. Obs: $a > 0$.

b) **(2.0 pts)** Demonstre uma fórmula como esta aqui,

$$\int x^\alpha \sqrt{x^2 - b^2}^\beta \, dx = w \int u^\alpha \sqrt{u^2 - 1}^\beta \, du$$

e dê um nome para ela. Você vai ter que descobrir qual é a substituição certa e qual é o valor da expressão $w$. Obs: $b > 0$.

**Questão 1 (cont.)**

c) **(2.5 pts)** Demonstre uma fórmula como esta aqui,

$$\int x^\alpha \sqrt{a^2x^2 - b^2}^\beta \, dx = z \int u^\alpha \sqrt{u^2 - 1}^\beta \, du$$

e dê um nome para ela. Você vai ter que descobrir qual é a substituição certa e qual é o valor da expressão $z$.

Obs: $a, b > 0$.

**Dicas pra questão 1**
Tente generalizar isto aqui,

$$\sqrt{x^2 - 25} = \sqrt{25\left(\left(\frac{x}{5}\right)^2 - 1\right)} = 5\sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^2 - 1}\,,$$

e se você precisar de mais idéias veja o gabarito da questão 2 aqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2018-2-C2-P1.pdf

e a "Aula 7" das notas da Cristiane Hernández.

Além disso dê nomes para as suas fórmulas! Se você souber usar a fórmula do item (a) pra demonstrar o item (b) e as fórmulas dos itens (a) e (b) pra demonstrar o (c) as suas demonstrações podem ficar bem curtas.

**Mais dicas para a questão 1**

Se você achar difícil demais resolver os itens (a), (b) e (c) direto no caso geral, em que $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ e $a, b > 0$, comece com um caso particular bem simples — por exemplo $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $a = b = 5$ — depois tente outro caso particular simples, depois outro, até você conseguir o caso geral.

Veja a figura da próxima página...

...e repare que passar do caso geral para um caso particular é fácil — é só fazer uma substituição, ou deletar passos intermediários — mas encontrar o caso geral que generaliza vários casos particulares conhecidos é difícil.

(Ir pra baixo na figura é fácil, ir pra cima é difícil)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
& \left(\begin{array}{rcl}
2^{k+1}-2^k & = & 2^{1+k}-2^k \\
 & = & 2^1\cdot 2^k-2^0\cdot 2^k \\
 & = & 2\cdot 2^k-1\cdot 2^k \\
 & = & (2-1)\cdot 2^k \\
 & = & 1\cdot 2^k \\
 & = & 2^k
\end{array}\right)
\arrow[dl, "{[k{:=}4]}"'] \arrow[dr, "{[k{:=}99]}"] & \\
\left(\begin{array}{rcl}
2^{4+1}-2^4 & = & 2^{1+4}-2^4 \\
 & = & 2^1\cdot 2^4-2^0\cdot 2^4 \\
 & = & 2\cdot 2^4-1\cdot 2^4 \\
 & = & (2-1)\cdot 2^4 \\
 & = & 1\cdot 2^4 \\
 & = & 2^4
\end{array}\right) \arrow[d] & &
\left(\begin{array}{rcl}
2^{99+1}-2^{99} & = & 2^{1+99}-2^{99} \\
 & = & 2^1\cdot 2^{99}-2^0\cdot 2^{99} \\
 & = & 2\cdot 2^{99}-1\cdot 2^{99} \\
 & = & (2-1)\cdot 2^{99} \\
 & = & 1\cdot 2^{99} \\
 & = & 2^{99}
\end{array}\right) \arrow[d] \\
\left(\ 2^5-2^4 \ = \ 2^4\ \right) & & \left(\ 2^{100}-2^{99} \ = \ 2^{99}\ \right)
\end{tikzcd}
$$

**Questão 1: itens extras**
(Acrescentados depois, a pedido dos alunos)
Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
\text{[P2.1a]} & = & \left(\int x^\alpha \sqrt{a^2x^2-1}^\beta \, dx = k \int u^\alpha \sqrt{u^2-1}^\beta \, du\right) \\
\text{[P2.1b]} & = & \left(\int x^\alpha \sqrt{x^2-b^2}^\beta \, dx = w \int u^\alpha \sqrt{u^2-1}^\beta \, du\right) \\
\text{[P2.1c]} & = & \left(\int x^\alpha \sqrt{a^2x^2-b^2}^\beta \, dx = z \int u^\alpha \sqrt{u^2-1}^\beta \, du\right)
\end{array}$$

Escreva o resultado das substituições abaixo:

d) **(0.1 pts)** [P2.1a] $\begin{bmatrix} \alpha:=0 \\ \beta:=1 \\ a:=3 \end{bmatrix}$

e) **(0.1 pts)** [P2.1b] $\begin{bmatrix} \alpha:=0 \\ \beta:=1 \\ b:=5 \end{bmatrix}$

f) **(0.1 pts)** [P2.1c] $\begin{bmatrix} \alpha:=0 \\ \beta:=1 \\ a:=2 \\ b:=4 \end{bmatrix}$

**Questão 1: itens extras (cont.)**
Nos itens (d), (e) e (f) do slide anterior você deve ter obtido três igualdades novas. Vamos dar nomes pra elas. Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
[\mathsf{P2.1d}] & := & [\mathsf{P2.1a}] \begin{bmatrix} \alpha{:=}0 \\ \beta{:=}1 \\ a{:=}3 \end{bmatrix} \\
[\mathsf{P2.1e}] & := & [\mathsf{P2.1b}] \begin{bmatrix} \alpha{:=}0 \\ \beta{:=}1 \\ b{:=}5 \end{bmatrix} \\
[\mathsf{P2.1f}] & := & [\mathsf{P2.1c}] \begin{bmatrix} \alpha{:=}0 \\ \beta{:=}1 \\ a{:=}2 \\ b{:=}4 \end{bmatrix}
\end{array}$$

**Questão 1: itens extras (cont.)**

g) **(0.2 pts)** Encontre uma mudança de variável — algo como, por exemplo, $\left[\begin{smallmatrix} u=42x \\ dx=\frac{1}{42}du \end{smallmatrix}\right]$ — e um valor para $k$ que façam a igualdade [P2.1d] ser verdade.

Agora faça a mesma coisa para as igualdades [P2.1e] e [P2.1f]:

h) **(0.2 pts)** Encontre uma mudança de variável e um valor para $w$ que façam a igualdade [P2.1e] ser verdade.

i) **(0.2 pts)** Encontre uma mudança de variável e um valor para $z$ que façam a igualdade [P2.1f] ser verdade.

**Questão 1: itens extras (cont.)**
Se você tiver conseguido resolver os itens (1g), (1h) e (1i) você conseguiu resolver alguns casos particulares dos itens (1a), (1b) e (1c)! Vamos fazer mais casos particulares...

A partir de agora ao invés de escrever "Encontre a mudança de variável e o valor de $k$ (ou $w$, ou $z$...) que façam a igualdade [Tal] ser verdade" eu vou escrever só "Resolva [Tal]".

j) **(0.2 pts)** Resolva [P2.1a] $\left[\begin{smallmatrix} \alpha:=0 \\ \beta:=3 \end{smallmatrix}\right]$.

k) **(0.2 pts)** Resolva [P2.1b] $\left[\begin{smallmatrix} \alpha:=0 \\ \beta:=3 \end{smallmatrix}\right]$.

l) **(0.2 pts)** Resolva [P2.1c] $\left[\begin{smallmatrix} \alpha:=0 \\ \beta:=3 \end{smallmatrix}\right]$.

**Questão 1: itens extras (cont.)**
Se você tiver conseguido resolver os itens anteriores
você deve ser capaz de resolver estes aqui...

Resolva [P2.1a] $\left[\alpha := 0\right]$,
Resolva [P2.1b] $\left[\alpha := 0\right]$,
Resolva [P2.1c] $\left[\alpha := 0\right]$.

...e com isso você deve conseguir resolver os
itens (1a), (1b) e (1c) — que valem muitos pontos.

**Questão 2.**
**(Total: 6.0 pts)**

Obs: esta questão é bem parecida com os exercícios daqui:
`http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-edovs.pdf`

Considere esta EDO, que vamos chamar de "$(*)$":

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y}$$

a) **(0.5 pts)** Desenhe o campo de direções da $(*)$.
Faça tracinhos nos pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

b) **(1.0 pts)** "Resolva direto" a EDO $(*)$, como no exercício 5 dos slides.

**Questão 2 (cont.)**

c) **(1.0 pts)** Descubra qual é a solução da $(*)$ que passa pelo ponto $(0, 2)$, e chame-a de $f_1(x)$. Desenhe o gráfico da função $f_1(x)$ e diga o domínio dela.

d) **(1.0 pts)** Teste a sua solução $f_1(x)$ — ou seja: verifique que ela é uma solução de $(*)$ e que ela passa pelo ponto $(0, 2)$.

e) **(1.5 pts)** Descubra qual é a solução da $(*)$ que passa pelo ponto $(1, -2)$, e chame-a de $f_2(x)$. Desenhe o gráfico da função $f_2(x)$ e diga o domínio dela.

f) **(1.0 pts)** Teste a sua solução $f_2(x)$ — ou seja: verifique que ela é uma solução de $(*)$ e que ela passa pelo ponto $(1, -2)$.

# Gabarito

(incompleto)

1a) Queremos:

$$\int x^\alpha \sqrt{a^2x^2-1}^{\,\beta}\,dx$$

$$= K \int u^\alpha \sqrt{u^2-1}^{\,\beta}\,du$$

Temos:

$$\int x^\alpha \sqrt{a^2x^2-1}^{\,\beta}\,dx \qquad \left[\begin{array}{l} u = ax \\ \frac{1}{a}u = x \\ \frac{1}{a}du = dx \end{array}\right]$$

$$= \int \left(\frac{u}{a}\right)^\alpha \sqrt{u^2-1}^{\,\beta} \cdot \frac{1}{a}\,du$$

$$= \frac{1}{a^{\alpha+1}} \int u^\alpha \sqrt{u^2-1}^{\,\beta}\,du$$

Então:

$$[1A] = \left( \begin{array}{l} \int x^\alpha \sqrt{a^2x^2-1}^{\,\beta}\,dx \qquad [u=ax] \\ = \frac{1}{a^{\alpha+1}} \int u^\alpha \sqrt{u^2-1}^{\,\beta}\,du \end{array} \right)$$

1b) QUEREMOS:

$$\int x^\alpha \sqrt{x^2-b^2}^\beta dx$$

$$= w \int u^\alpha \sqrt{u^2-1}^\beta du$$

TEMOS:

$$\int x^\alpha \sqrt{x^2-b^2}^\beta dx$$

$$= \int x^\alpha \sqrt{b^2((\tfrac{x}{b})^2-1)}^\beta dx$$

$$= \int x^\alpha \left(b\sqrt{(\tfrac{x}{b})^2-1}\right)^\beta dx$$

$$= b^\beta \int x^\alpha \sqrt{(\tfrac{x}{b})^2-1}^\beta dx \qquad \left[\begin{array}{l} u = \frac{x}{b} \\ bu = x \\ b\,du = dx \end{array}\right]$$

$$= b^\beta \int (bu)^\alpha \sqrt{u^2-1}^\beta b\,du$$

$$= b^\beta \cdot b^\alpha \cdot b \int u^\alpha \sqrt{u^2-1}^\beta du$$

ENTÃO:

$$[1B] = \left(\begin{array}{ll} \int x^\alpha \sqrt{x^2-b^2}^\beta dx & [u = \frac{x}{b}] \\ = b^{\alpha+\beta+1} \int u^\alpha \sqrt{u^2-1}^\beta du & \end{array}\right)$$

1c) QUEREMOS:

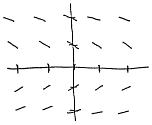
$$\int x^\alpha \sqrt{a^2x^2-b^2}\,dx$$
$$= Z \int u^\alpha \sqrt{u^2-1}\,du$$

TEMOS:

$$\int x^\alpha \sqrt{a^2x^2-b^2}^{\,\beta}\,dx$$
$$= \int x^\alpha \left(b\sqrt{\frac{a^2x^2}{b^2}-1}\right)^\beta dx$$
$$= b^\beta \int x^\alpha \sqrt{\left(\tfrac{a}{b}x\right)^2-1}^{\,\beta}\,dx \qquad \left[\begin{array}{l} u=\frac{a}{b}x \\ \frac{b}{a}u = x \\ \frac{b}{a}du = dx \end{array}\right]$$
$$= b^\beta \int \left(\tfrac{b}{a}u\right)^\alpha \sqrt{u^2-1}^{\,\beta} \cdot \tfrac{b}{a}\,du$$
$$= b^\beta \frac{b^\alpha}{a^\alpha}\frac{b}{a}\int u^\alpha \sqrt{u^2-1}^{\,\beta}\,du$$

ENTÃO:

$$[1C] = \left(\begin{array}{ll} \int x^\alpha \sqrt{a^2x^2-b^2}\,dx & \left[u=\frac{a}{b}x\right] \\ = \frac{b^{\alpha+\beta+1}}{a^{\alpha+1}}\int u^\alpha \sqrt{u^2-1}^{\,\beta}\,du & \end{array}\right)$$

2a) 

2b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y}$

$2y\,dy = -dx$

$\int 2y\,dy = \int -1\,dx$

$\quad\ \|\qquad\qquad \|$

$y^2 + C_1 \qquad -x + C_2$

$y^2 = -x + C_2 - C_1$

$\ \ = -x + C_3$

$y = \pm\sqrt{-x + C_3}$

2c) $(x,y) = (0,2)$

$2 = \pm\sqrt{-0 + C_3}$

$\Rightarrow 2 = \sqrt{-0 + C_3}$

$\ \ = \sqrt{4}$

$\Rightarrow C_3 = 4$

$\Rightarrow f_1(x) = \sqrt{-x+4}$

2d) $\frac{d}{dx} f_1(x) =$

$\frac{d}{dx}\sqrt{-x+4} =$

$\frac{-1}{2\sqrt{-x+4}}$

$\frac{dy}{dx} \overset{?}{=} -\frac{1}{2y}$

$\quad \| \qquad\qquad \|$

$\frac{d}{dx} f_1(x) \qquad -\frac{1}{2 f_1(x)}$

$\quad \| \qquad\qquad \|$

$\frac{-1}{2\sqrt{-x+4}} \qquad -\frac{1}{2\sqrt{-x+4}}$

OU SEJA, $f_1(x)$ É SOLUÇÃO DA EDO (*).

$(x,y) = (0,2)$

$f_1(x) \overset{?}{=} y$

$\ \ \| \qquad \|$

$f_1(0) \qquad 2$

$\ \ \|$

$\sqrt{-0+4}$

$\ \ \|$

$2$

OU SEJA, $f_1(x)$ PASSA PELO PONTO $(0,2)$.

2e) $(x,y)=(1,-2)$

$$y = \pm\sqrt{-x+C_3}$$

$$-2 = \pm\sqrt{-1+C_3}$$

$$-2 = -\sqrt{-1+C_3}$$

$$2 = \sqrt{-1+C_3}$$

$$4 = -1+C_3$$

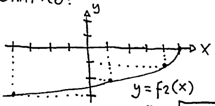
$$C_3 = 5$$

$$y = -\sqrt{-x+5}$$

$$f_2(x) = -\sqrt{-x+5}$$

$f_2(x)$ ESTÁ DEFINIDA QUANDO $-x+5 \geq 0$, OU SEJA, QUANDO $5 \geq x$, OU SEJA, PARA $x \in (-\infty, 5]$.

GRÁFICO:




$y = f_2(x)$
$= -\sqrt{-x+5}$

2f) $\frac{d}{dx} f_2(x) =$

$$\frac{d}{dx}\left(-\sqrt{-x+5}\right) =$$

$$-\frac{d}{dx}\sqrt{-x+5} =$$

$$-\frac{-1}{2\sqrt{-x+5}} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-x+5}}$$

$$\frac{dy}{dx} \overset{?}{=} -\frac{1}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x+5}}$$

$$-\frac{1}{2y} = -\frac{1}{2f(x)} = -\frac{1}{2(-\sqrt{-x+5})} = \frac{1}{2\sqrt{-x+5}}$$

OU SEJA, $f_2(x)$ É SOLUÇÃO DA EDO (*).

$(x,y)=(1,-2)$

$$f_2(x) \overset{?}{=} y$$

$$f_2(x) = -\sqrt{-x+5} = -\sqrt{-1+5} = -\sqrt{4} = -2, \qquad y = -2$$

OU SEJA, $f_2(1) = -2$.