Cálculo 2 - 2020.2

Aula 12: o TFC2.

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

Na aula passada nós vimos esta versão do segundo Teorema Fundamental do Cálculo:

> Se a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma primitiva da função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $c, d \in [a,b]$, então:
>
> $$\int_{x=c}^{x=d} f(x)\,dx \quad = \quad F(x)\big|_{x=c}^{x=d}$$

A notação "$F(x)\big|_{x=c}^{x=d}$" é novidade. A pronúncia de "$F(x)\big|_{x=c}^{x=d}$" é "a diferença do valor de $F(x)$ entre $x = c$ para $x = d$", e a definição formal é:

$$\begin{array}{rcl} F(x)\big|_{x=c}^{x=d} & = & F(x)[x := d] - F(x)[x := c] \\ & = & F(d) - F(c). \end{array}$$

Nós não vimos uma demostração do TFC2... vimos só uns argumentos que devem ter convencido vocês de que ele vale pra todas as funções escada. As notas do Pierluigi têm um esboço da demonstração, mas ele pula um monte de detalhes. A demonstração completa é bem grande e não nos interessa neste curso — nós queremos usar o TFC2 pra calcular um monte de coisas.

Nesta aula e nas próximas nós vamos tratar o TFC2 como esta igualdade,

$$[\textsf{TFC2}] \quad = \quad \left(\int_{x=c}^{x=d} F'(x)\,dx = F(x)\big|_{x=c}^{x=d} \right)$$

que vai valer para toda $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável e para todos os $c, d \in [a,b]$, e nós vamos usar a operação $[:=]$ para obter casos particulares desta fórmula.

(Sobre o TFC1: ele praticamente só serve pra demonstrar o TFC2...)

Digamos que queremos "integrar" isto:

$$\int_{x=3}^{x=4} e^{2x} \cos(e^{2x})\, dx = ?$$

Podemos usar o TFC2 várias vezes, chutando 'a's, 'b's e 'F's...

$$\begin{array}{rcl}
[\mathsf{TFC2}]\left[\begin{smallmatrix} d:=200 \\ c:=42 \\ F(x):=\operatorname{sen} x \\ F'(x):=\cos x \end{smallmatrix}\right] & = & \left(\int_{x=42}^{x=200} \cos x\, dx = (\operatorname{sen} x)\big|_{x=42}^{x=200}\right) \\
[\mathsf{TFC2}]\left[\begin{smallmatrix} d:=4 \\ c:=3 \\ F(x):=\operatorname{sen}(e^{2x}) \\ F'(x):=(2e^{2x})\cos(e^{2x})) \end{smallmatrix}\right] & = & \left(\int_{x=3}^{x=4} (2e^{2x})\cos(e^{2x}))\, dx = \big(\operatorname{sen}(e^{2x})\big)\big|_{x=3}^{x=4}\right) \\
[\mathsf{TFC2}]\left[\begin{smallmatrix} d:=4 \\ c:=3 \\ F(x):=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(e^{2x}) \\ F'(x):=e^{2x}\cos(e^{2x})) \end{smallmatrix}\right] & = & \left(\int_{x=3}^{x=4} e^{2x}\cos(e^{2x}))\, dx = \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(e^{2x})\right)\Big|_{x=3}^{x=4}\right)
\end{array}$$

Ou seja: $? = \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(e^{2x})\right)\Big|_{x=3}^{x=4}$,
que dá pra calcular em tempo finito — se soubermos calcular senos e exponenciais em tempo finito.

Vamos chamar o método do slide anterior de "integração por TFC2 e chutar-e-testar".

Exercício 1.
Integre por TFC2 e chutar-e-testar:

a) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos x \, dx = ?$

b) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x \, dx = ?$

c) $\displaystyle\int_{x=\pi/2}^{x=\pi} \operatorname{sen} x \, dx = ?$

d) $\displaystyle\int_{x=5}^{x=6} \operatorname{sen}(2x+3) \, dx = ?$

Exercício 2.
Faça os 5 primeiros itens do Exercício 35 das notas do Pierluigi.

(Uma definição para) a integral indefinida
Dê uma olhada na seção 4.2.2 do Martins/Martins.
Eles usam o "$+\,C$" na definição de integral indefinida.
A maioria dos livros faz isso, mas isso gera algumas ambiguidades que eu prefiro evitar...

Eu vou usar esta definição aqui para a integral indefinida.
As duas igualdades abaixo são exatamente equivalentes:

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int f(x)\,dx &=& F(x) \\ f(x) &=& \frac{d}{dx}F(x) \end{array}$$

Ou seja: pra determinar se uma igualdade da forma "$\int f(x)\,dx \;=\; F(x)$" é verdade, traduza ela, e teste se a igualdade $f(x) \;=\; \frac{d}{dx}F(x)$ é verdade.

Exercício 3.
Quais das igualdades abaixo são verdade?
a) $\int \operatorname{sen} x \, dx = \cos x$
b) $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$
c) $\int x^4 \, dx = 5x^5$
d) $\int x^4 \, dx = \frac{1}{5}x^5$
e) $\int x^4 \, dx = \frac{1}{5}x^5 + 42$

Exercício 4.
As duas igualdades em

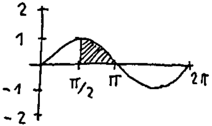
$$42 \quad = \quad \int 0 \; dx \quad = \quad 200$$

são verdadeiras. Porque é que isto não implica em $42 = 200$?

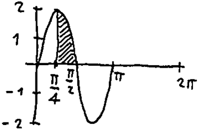
(Introdução à) integração por substituição

Repare que estas duas integrais correspondem a áreas iguais:
(amasse os gráficos na horizontal e estique eles na vertical)

$$\int_{x=\pi/2}^{x=\pi} \operatorname{sen} x \, dx \quad = \quad \text{Área} \left(\quad \right)$$



$$\int_{x=\pi/4}^{x=\pi/2} 2 \operatorname{sen} 2x \, dx \quad = \quad \text{Área} \left(\quad \right)$$



Vamos ver como transformar a segunda integral,
que é complicada, na primeira, que é mais simples.

(Introdução à) integração por substituição (2)

Isto aqui é uma demonstração feita de uma sequência de três igualdades, e um caso particular dela...

$$[\mathsf{S1}] \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc} f(g(x))|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ f(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S1}] \begin{bmatrix} g(x):=2x \\ g'(x):=2 \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc} f(2x)|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(2x)\cdot 2\,dx \\ \parallel & & \\ f(u)|_{u=2a}^{u=2b} & = & \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

Lembre que:

$$[\mathsf{TFC2}] \quad = \quad \left(\int_{x=c}^{x=d} F'(x)\,dx = F(x)\big|_{x=c}^{x=d} \right)$$

Exercício 5.

a) Qual é o resultado da substituição $[\mathsf{TFC2}]\begin{bmatrix} d:=b \\ c:=a \\ F(x):=f(g(x)) \\ F'(x):=f'(g(x))g'(x) \end{bmatrix}$?

b) Qual é o resultado de $[\mathsf{TFC2}][x := u]\begin{bmatrix} d:=g(b) \\ c:=g(a) \\ F(u):=f(u) \\ F'(u):=f'(u) \end{bmatrix}$?

c) Verifique que:

$$f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} = f(g(b)) - f(g(a)) = f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)}$$

d) Os itens (a), (b) e (c) provam as três igualdades da $[\mathsf{S1}]$?

Exercício 6.
No slide 9 eu disse, sem demonstração, que:

$$\int_{x=\pi/2}^{x=\pi} \operatorname{sen} x \, dx \quad = \quad \int_{x=\pi/4}^{x=\pi/2} 2 \operatorname{sen} 2x \, dx \qquad (*)$$

e no slide 10 a gente começou a transformar [S1] numa demonstração de $(*)$.
Descubra o que colocar em cada um dos '?'s abaixo para obter uma demonstração de $(*)$:

$$[\mathsf{S1}] \begin{bmatrix} g(x):=2x \\ g'(x):=2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(u):=? \\ f'(u):=? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b:=? \\ a:=? \end{bmatrix}$$

No slide 9 eu disse que a gente ia aprender a transformar integrais mais complicadas em integrais mais simples. No exercício 1d você deve ter passado um tempão tentando resolver *direto* uma integral complicada. O truque é esse aqui. As [S2] e [S3] do próximo slide são consequências da [S1] do slide 10, que você demonstrou no exercício 5...

Dica **MUITO** importante que **MUITAS** pessoas levam **MUITO** tempo pra entender: No item c do próximo slide você vai substituir a f mas não a F, e a primeira linha da [S2] vai virar "Se $F'(u) = \tan u$ então:"...

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \begin{pmatrix} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} & & \\ F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$[\mathsf{S3}] \quad = \quad \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel \\ \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{pmatrix}$$

Exercício 7.

a) $[\mathsf{S3}]\,[g(x) := x^2] = ?$

b) $[\mathsf{S3}]\,\begin{bmatrix} f(u){:=}\tan u \\ g(x){:=}x^2 \end{bmatrix} = ?$

c) $[\mathsf{S2}]\,\begin{bmatrix} f(u){:=}\tan u \\ g(x){:=}x^2 \end{bmatrix} = ?$