Cálculo 2 - 2020.2

Aula ??: EDOs com variáveis separáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

Introdução
Seja $(*)$ a EDO abaixo:

$$f'(x) = 2x \qquad (*)$$

Ela tem muitas soluções. Por exemplo, $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^2 + 3$ são duas soluções diferentes dela.

Desenhando várias soluções dela num gráfico — veja o próximo slide — dá pra entender como é o conjunto de todas as soluções dela: ele é um conjunto de infinitas curvas disjuntas, que "cobrem o $\mathbb{R}^2$ todo", no sentido de que cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pertence a exatamente uma dessas curvas (ou: "soluções").

Por exemplo, o ponto $(2, 5)$ pertence à solução $f(x) = x^2 + 1$.

A "solução geral" da EDO $f'(x) = 2x$ é $f(x) = x^2 + C$; para obter soluções particulares substituimos esse C por números. Por exemplo, a solução de

$$f'(x) = 2x, \qquad f(2) = 5$$

é $f(x) = x^2 + 1$.

Campos de direções

Vamos agora considerar esta outra EDO:

$$f'(x) = -\frac{x}{y}$$

Nós ainda não sabemos quais são as soluções dela...
Mas existe um jeito simples de interpretar graficamente o que ela quer dizer. Para cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a fórmula $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ nos permite calcular o coeficiente angular no ponto (x, y) da solução que passa pelo ponto (x, y).
Por exemplo:

$(x,y)=(-2,2)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1$	$(x,y)=(-1,2)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1/2$	$(x,y)=(0,2)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=0$	$(x,y)=(1,2)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-1/2$	$(x,y)=(2,2)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-1$
$(x,y)=(-2,1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=2$	$(x,y)=(-1,1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1$	$(x,y)=(0,1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=0$	$(x,y)=(1,1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1$	$(x,y)=(2,1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-2$

Veja as figuras daqui:

http://angg.twu.net/2020.2-C2/thomas_secoes_15.1_ate_15.3.pdf

Os gráficos que usam tracinhos em certos pontos pra indicar coeficientes angulares naqueles pontos são gráficos de *campos de direções*.

Exercício 1.

Represente graficamente os campos de direções abaixo desenhando tracinhos com os coeficientes angulares adequados nos pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; ou seja, em cada item você vai ter que desenhar 25 tracinhos. Quando $\frac{dy}{dx} = \infty$ desenhe o tracinho na vertical.

a) $\frac{dy}{dx} = -1$

b) $\frac{dy}{dx} = x$

c) $\frac{dy}{dx} = 2x$

d) $\frac{dy}{dx} = -x/y$

e) $\frac{dy}{dx} = 1/y$

f) $\frac{dy}{dx} = 2/y$

g) $\frac{dy}{dx} = -y/x$

Exercício 2.

Tente imaginar o resto de cada um dos 7 campos de direções que você desenhou no exercício 1. Para cada um dos campos tente imaginar as curvas que você obteria se ligasse todos os tracinhos, e tente interpretar essas curvas como o conjunto de soluções da EDO que representamos graficamente como o campo de direções. Neste exercício você vai tentar encontrar soluções para EDOs no olhômetro a partir dos campos de direções delas.

Para cada uma das funções abaixo diga quais das 7 EDOs do exercício 1 podem ter aquela função como solução.

a) $y = x^2$
b) $y = \sqrt{x}$
c) $y = 1/x$
d) $y = \sqrt{1 - x^2}$

Na página seguinte temos o método geral para resolver EDOs com variáveis separáveis. Vou chamá-lo de [EDOVSG] pra podermos discutir como obter casos particulares dele usando a operação '[:=]', ao invés de termos que escrever coisas como "substituindo $f(x)$ por ___ acima obtemos...".

O método [EDOVGS] usa algumas gambiarras — veja o vídeo pra explicações.

$$[\mathsf{EDOVSG}] = \left(\begin{array}{rcl}
& \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x)}{g(y)} & \\[2ex]
g(y)\,dy & = & f(x)\,dx \\[1ex]
\int g(y)\,dy & = & \int f(x)\,dx \\
\parallel & & \parallel \\
G(y)+C_1 & & F(x)+C_2 \\[2ex]
G(y)+C_1 & = & F(x)+C_2 \\
G(y) & = & F(x)+C_2-C_1 \\
& = & F(x)+C_3 \\[2ex]
G^{-1}(G(y)) & = & G^{-1}(F(x)+C_3) \\
\parallel & & \\
y & &
\end{array} \right)$$

Digamos que queremos resolver esta EDO:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Aparentemente dá pra resolvê-la usando

$$[\mathsf{EDOVSG}] \begin{bmatrix} f(x) := -x \\ g(y) := y \end{bmatrix} \;,$$

mas também precisamos das primitivas $F(x)$ e $G(y)$, e da inversa $G^{-1}(y)$... a substituição certa é:

$$[\mathsf{EDOVSG}] \begin{bmatrix} f(x) := -x \\ g(y) := y \\ F(x) := -\frac{x^2}{2} \\ G(y) := \frac{y^2}{2} \\ G^{-1}(z) := \sqrt{2z} \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\
y\,dy &= -x\,dx \\
\int y\,dy &= \int -x\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\int y\,dy & = & \int -x\,dx \\
\| & & \| \\
\frac{y^2}{2} + C_1 & & -\frac{x^2}{2} + C_2
\end{array}
$$

$$\frac{y^2}{2} + C_1 = -\frac{x^2}{2} + C_2$$

...que dá isto:

$$
\begin{aligned}
\frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + C_2 - C_1 \\
&= -\frac{x^2}{2} + C_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\sqrt{2 \cdot \frac{y^2}{2}} & = & \sqrt{2 \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + C_3\right)} \\
\| & & \| \\
y & & \sqrt{2C_3 - x^2} \\
 & & \| \\
 & & \sqrt{C_4 - x^2}
\end{array}
$$

(As últimas linhas têm passos extras.)

Como testar uma solução

Digamos que estamos tentando resolver a EDO

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{x}{f(x)}, \qquad \text{ou:} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

e queremos ver se estas duas funções são solução dela:
$f_1(x) = x^2 + 3,\ f_2(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

Como testar uma solução (2)

Basta fazer:

$$\left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right) \begin{bmatrix} f(x) := x^2 + 3 \\ f'(x) = 2x \end{bmatrix} \;=\; \left(2x = -\frac{x}{x^2+3}\right)$$

$$\left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right) \begin{bmatrix} f(x) := \sqrt{25 - x^2} \\ f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \end{bmatrix} \;=\; \left(\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\right)$$

e ver se as igualdades da direita são verdadeiras para todo x no domínio de cada função — aliás, nos pontos em que a função é derivável...

A função $f_1(x) = x^2$ está definida em todo $\mathbb{R}$ e é derivável em $\mathbb{R}$, e a função $f_2(x) = \sqrt{25 - x^2}$ está definida no intervalo fechado $[-5, 5]$ e é derivável no intervalo aberto $(-5, 5)$.

Também dá pra testar soluções gerais, basta tratar os 'C's delas como constantes.

Exercício 3.
No exercício 1g você desenhou o campo de direções desta EDO:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \qquad (**)$$

e pelo campo de direções você deve ter conseguido ter uma noção de quais são as soluções dela... (dica: hipérboles!)

a) Resolva a EDO $(**)$ fazendo isto aqui:

$$[\mathsf{EDOVSG}] \begin{bmatrix} f(x) = -1/x \\ g(y) = 1/y \\ F(x) = {\color{red}?} \\ G(y) = {\color{red}?} \\ G^{-1}(y) = {\color{red}?} \end{bmatrix}$$

(Dica: preencha os '?'s corretamente)

Exercício 3.

b) Diga qual é a solução geral.

c) Teste a sua solução geral.

d) Obtenha a solução que passa pelo ponto $(2, 3)$.

e) Obtenha a solução que passa pelo ponto $(2, -2)$.

Funções inversas por chutar e testar

Digamos que

$$\begin{array}{rcl} y & = & 3+\sqrt{x+4}, \quad \text{isto é,} \\ f(x) & = & 3+\sqrt{x+4}, \end{array}$$

e sejam:

$$\begin{array}{rcl} g(y) & = & (y-3)^2+4, \\ h(y) & = & (y-4)^2+3. \end{array}$$

Eu acho difícil ver só fazendo contas de cabeça se $f^{-1}(y) = g(y)$ ou se $f^{-1}(y) = h(y)$... então é bom a gente saber testar se as inversas que a gente obteve de cabeça estão certas. O teste é:

$$\begin{array}{rcl} (f^{-1}(f(x)) = x) \left[\begin{array}{c} f(x) := 3+\sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y) := (y-3)^2+4 \end{array} \right] & = & {\color{red}?} \\ (f^{-1}(f(x)) = x) \left[\begin{array}{c} f(x) := 3+\sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y) := (y-4)^2+3 \end{array} \right] & = & {\color{red}?} \end{array}$$

Funções inversas por chutar e testar (2)

O modo tradicional de obter inversas é por uma série de passos, como:

$$\begin{array}{rcl} f(x) &=& 3+\sqrt{x+4} \\ y &=& 3+\sqrt{x+4} \\ y-3 &=& \sqrt{x+4} \\ (y-3)^2 &=& x+4 \\ (y-3)^2-4 &=& x \\ (y-3)^2-4 &=& f^{-1}(y) \end{array}$$

...mas é importante a gente saber testar se chegou na inversa certa.

Exercício 4.
Obtenha inversas para as seguintes funções:

$$\begin{array}{rcl}
f_1(x) & = & 2+3\sqrt{5x+6} \\
f_2(x) & = & 2+3\sqrt[4]{5x+6} \\
f_3(x) & = & 2+3(4x+5)^6 \\
f_4(x) & = & 2+3\ln(4x+5) \\
f_5(x) & = & 2+3e^{4x+5} \\
f_6(x) & = & \sqrt{2+3e^{4x+5}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
f_7(x) & = & \ln x \\
f_8(x) & = & \ln -x \\
f_9(x) & = & |x| \\
f_{10}(x) & = & \ln |x|
\end{array}$$

Porque é que $f_9^{-1}(x)$ e $f_{10}^{-1}(x)$ não existem?

Resolvendo "direto"

No segundo vídeo sobre esta parte da matéria – este aqui:

http://angg.twu.net/eev-videos/2020-2-C2-edovs-2.mp4

eu comecei mostrando como resolver a EDO

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

depois passei pro caso geral,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)},$$

e aí defini o "método" [EDOVSG]... e nos exercícios que vieram depois disso nós usamos o [EDOVSG] e a operação '[:=]'.

Exercício 5.
a) Tente resolver esta EDO "direto",
como no início do vídeo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

E pare quando você chegar neste ponto:

$$y^2 = x + C_4$$

O passo seguinte, se seguirmos o método do vídeo, é

$$y = \pm\sqrt{x + C_4}\ldots$$

Exercício 5 (cont.)
Podemos considerar que temos duas soluções gerais:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= +\sqrt{x+C_4}, \quad \text{e} \\ f_2(x) &= -\sqrt{x+C_4}. \end{aligned}$$

b) Encontre o valor que C_4 que faz com que $f_1(2) = 3$.
c) Encontre o valor que C_4 que faz com que $f_2(4) = -5$.
d) Encontre a solução que passa pelo ponto $(-3, -4)$.