Cálculo 2 - 2020.2

Aula 8: integrais de funções escada

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

Dê uma olhada nas propriedades da integral que o Pierluigi Beneveri demonstra (!!!) nas páginas 5 a 8 das notas dele:

`https://www.ime.usp.br/~pluigi/registro-MAT121-15.pdf`

`http://angg.twu.net/2020.2-C2/pierluigi_beneveri_MAT121-15.pdf`

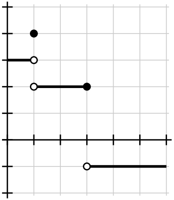
As demonstrações *formais*, como ele faz, com estimativas e somatórios, não nos interessam neste curso... mas todas as demonstrações dele podem ser "traduzidas" pra argumentos visuais como os que você deve ter entendido fazendo os exercícios da aula passada.

Nos exercícios de hoje nós vamos usar principalmente o Exercício 18 da página 5 das notas do Pierluigi e a Proposição 8/Propriedade 4 da página 7.

Leia também a Definição 9 na página 8, principalmente os comentários (1) e (2)... hoje nós vamos começar a ter que lidar com "áreas negativas"!

Funções escada

Uma **função escada** é uma cujo gráfico é composto por um número finito de segmentos horizontais e um número finito – talvez zero – de pontos isolados. Por exemplo:

$f(x) \quad =$ 

Exercício 1.

Calcule:

a) $\int_{x=0}^{x=1} f(x)\,dx$

b) $\int_{x=1}^{x=3} f(x)\,dx$

c) $\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx$

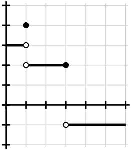
d) $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$ (veja o exercício 3)

Exercício 2.

Agora vamos tentar integrar a $f(x)$ da página anterior usando as definições dos slides que usamos nas últimas aulas...
Seja $[a,b]$ o intervalo $[0,3]$.
Seja $\{P_0, P_1, P_2, \ldots\}$ a nossa sequência preferida de partições do intervalo $[a,b]$.

a) Quantos intervalos tem P_{10}?
b) Quantos pontos tem P_{10}?
c) Qual é a largura de cada intervalo de P_{10}?
d) Represente graficamente $\overline{\int}_{P_{10}} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_{10}} f(x)\,dx$.
e) A resposta do item anterior é um retângulo. Qual é a sua base? Qual é a sua altura? Qual é a sua área?
f) Calcule $\overline{\int}_{P_{10}} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_{10}} f(x)\,dx$.
g) Calcule $\overline{\int}_{P_{1000}} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_{1000}} f(x)\,dx$.

Exercício 3.
Seja f esta função (a mesma do slide 3):

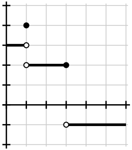
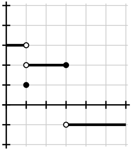
$f(x) \quad =$ 

Dá pra calcular $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$ assim:

$$\begin{array}{rcl}
\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx & = & \int_{x=0}^{x=1} f(x)\,dx + \int_{x=1}^{x=3} f(x)\,dx + \int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx \\
& = & 3\cdot(1-0) + 2\cdot(3-1) + (-1)\cdot(4-3) \\
& = & 3+4-1 \quad = \quad 6
\end{array}$$

Descubra quais propriedades/proposições/exercícios/etc
do Pierluigi nós usamos em cada '=' acima.

Exercício 4.
Sejam f e g estas funções:

$f(x) \quad =$  $\qquad g(x) \quad =$ 

Elas são integráveis no intervalo $[0,4]$
e só diferem no ponto $x=1$, $1 \in [0,4]$...
Então $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=4} g(x)\,dx$.

Acho que o Pierluigi não explica explicitamente porque esse "então" é verdade. Vamos ver isto passo a passo.

a) Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. (Fica implícito que é "$\forall x$".)
Faça o gráfico da $h(x)$.

Exercício 4 (cont.)

b) Calcule $\overline{\int}_{P_{10}} h(x)\,dx - \underline{\int}_{P_{10}} h(x)\,dx$.

c) Calcule $\overline{\int}_{P_{1000}} h(x)\,dx - \underline{\int}_{P_{1000}} h(x)\,dx$.

d) Conclua que $\int_{x=0}^{x=4} h(x)\,dx = 0$.

Dá pra provar que $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=4} g(x)\,dx$ assim:

$$\begin{array}{rcl}
\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx &=& \int_{x=0}^{x=4} g(x) + h(x)\,dx \\
&=& \int_{x=0}^{x=4} g(x)\,dx + \int_{x=0}^{x=4} h(x)\,dx \\
&=& \int_{x=0}^{x=4} g(x)\,dx + 0 \\
&=& \int_{x=0}^{x=4} g(x)\,dx
\end{array}$$

e) Descubra quais propriedades/proposições/exercícios/etc do Pierluigi nós usamos em cada '$=$' acima.

Até agora eu dei muito poucas dicas sobre como vocês devem escrever as soluções dos exercícios... isso foi de propósito. O nível de detalhe esperado varia de acordo com o contexto, e até agora vocês só precisavam de soluções que vocês mesmos entendessem e tivessem certeza de cada passo, e que os colegas de vocês entendessem quando vocês fossem discutir com eles.

Leia a "dica 7" daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=5

Aliás, leia as páginas 4 e 5 inteiras.

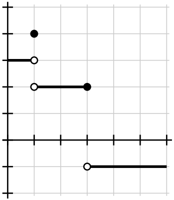
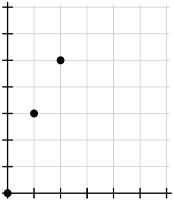
Depois leia este texto que mandei pras turmas de C2 depois da P1 do semestre passado:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-P1.pdf#page=10

Exercício 5.

Seja $F(b) = \int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$.

a) Calcule $F(0)$, $F(0.5)$, $F(1)$, $F(1.5)$, …, $F(6)$ e represente os valores que você obteve num gráfico. No gráfico à direita abaixo eu representei os pontos $(0, F(0))$, $(1, F(1))$ e $(2, F(2))$ — faça os outros.

$f(x) \quad =$  $\qquad F(b) \quad =$ 

b) Represente graficamente $\int_{x=0}^{x=1.5} f(x)\,dx - \int_{x=0}^{x=0.5} f(x)\,dx$ como uma área no gráfico da f.

c) Represente graficamente $F(1.5) - F(0.5)$ no gráfico da F.

Exercício 5 (cont.)

Nos itens (b) e (c) do slide anterior nós vimos que uma diferença

$$F(d) - F(c) = \int_{x=0}^{x=d} f(x)\,dx - \int_{x=0}^{x=c} f(x)\,dx$$

pode ser interpretada tanto como uma área no gráfico à esquerda quanto como uma diferença de altura no gráfico à direita. Nos próximos itens você vai ter que usar essa dupla interpretação em todo lugar.

d) Verifique que $F(1.3) - F(1.2)$, $F(1.4) - F(1.3)$, $F(1.5) - F(1.4)$ e $F(1.6) - F(1.5)$ são retângulos com a mesma área — e verifique que isto quer dizer que os pontos $(1.2, F(1.2))$, $(1.3, F(1.3))$, $(1.4, F(1.4))$, $(1.5, F(1.5))$ e $(1.6, F(1.6))$ estão na mesma reta. Qual é base e a altura de cada um desses retângulos? Qual é o coeficiente angular dessa reta?

e) Faça o mesmo para estes valores de x: 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 — as alturas e o coeficiente angular vão mudar.

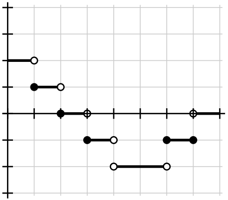
Exercício 5 (cont.)

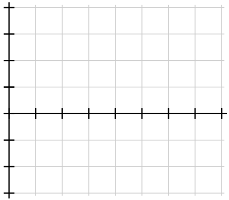
A $F(b)$ vai ser contínua, e o gráfico dela vai ser formado por três segmentos de reta. Pense sozinho em porque isto é verdade — nós vamos demonstrar isto em breve.

f) Complete o gráfico da $F(b)$ (do item a).
g) Em que pontos a $F(b)$ é derivável?
h) Em que pontos a $F(b)$ não é derivável?
i) Seja $g(b) = \frac{d}{db}F(b)$. Faça o gráfico da $g(b)$.
j) Qual é o domínio da $g(b)$?
k) Em que pontos $f(x)$ e $g(b)$ coincidem?

Exercício 6.

Agora que você entendeu a relação entre a $f(x)$ e $F(b) = \int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$ num caso específico você vai tentar fazer um outro caso. Seja $f(x)$ a função à esquerda abaixo, e desenhe o gráfico da $F(b)$ — o "gráfico da integral de $f(x)$" — à direita. Obs: depois que a gente tem prática dá pra resolver problemas assim sem nenhum erro em poucos segundos! Sério!!!

$f(x) \quad =$ 

$$F(b) = \int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx =$$ 

Exercício 7.

No exercício 6 você fez o gráfico de $F(b) = \int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$.

b) Agora faça o gráfico de $G(b) = \int_{x=1}^{x=b} f(x)\,dx$,

c) ...e o gráfico de $H(b) = \int_{x=2}^{x=b} f(x)\,dx$.

Você provavelmente desenhou o gráfico da sua $G(b)$ como se ela só estivesse definida a partir de $b = 1$, e o gráfico da $H(b)$ como se ela só estivesse definida a partir de $b = 2$. Isso pode ser melhorado. Dê uma olhada na página 10 das notas do Pierluigi, onde ele define "integrais com extremos na ordem inversa" por esta regra aqui:

$$\int_{x=b}^{x=a} f(x)\,dx = -\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

d) Calcule $G(0.5)$.

Exercício 7 (cont.)

e) Agora que você aprendeu a calcular $G(b)$ para $b < 1$ usando o truque da "integral com extremos na ordem inversa" faça uma versão melhorada do gráfico do item (b) na qual o seu gráfico da $G(b)$ inclua os valores de $G(b)$ para $b \in [0, 1]$.

f) Faça o mesmo para o item (c): faça uma versão melhorada do gráfico da $H(b)$.

g) (Importantíssimo!) Verifique que tanto $F(b)$ quanto $G(b)$ e $H(b)$ são funções contínuas que obedecem

$$F'(b) = G'(b) = H'(b) = f(b)$$

em todos os pontos em que essas derivadas fazem sentido — que são exatamente os pontos em que a $f(b)$ é contínua.

Primitivas

As funções $F(x)$, $G(x)$ e $H(x)$ que você obteve no exercícios 6 e 7 são "primitivas" da função $f(x)$. A definição usual de primitiva que você vai encontrar nos livros é esta aqui:

> Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Dizemos que uma função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma *primitiva de f* quando $\forall x \in (a,b).\ F'(x) = f(x)$.

Primitivas (2)

Nós vamos usar uma definição um pouco mais complicada de primitiva... esta aqui:

> Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, seja P uma partição de $[a, b]$, e digamos que a função f seja contínua em cada intervalo aberto (a_i, b_i) da partição — ou seja, f não precisa ser contínua nos pontos de P. Uma função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma *primitiva de f* se: 1) F é contínua em $[a, b]$, 2) F é derivável em todos os pontos de $[a, b] \backslash P$, 3) $\forall x \in [a, b] \backslash P.\ F'(x) = f(x)$.

Exercício 8.

Verifique que as funções $F(x)$, $G(x)$ e $H(x)$ dos exercícios 6 e 7 são primitivas para a função $f(x)$ do slide 12. Dica: você vai ter que escolher $[a, b]$ e P da forma certa.

Primitivas: como usar

Se a função $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma primitiva da função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $c,d\in[a,b]$, então podemos usar a F pra calcular integrais da f:

$$\int_{x=c}^{x=d} f(x)\,dx = F(d)-F(c)$$

Isto é exatamente o que você fez nos exercício 5b e 5c, mas lá estávamos olhando pra um caso particular muito simples... Isto vale em geral, mesmo quando a nossa função $f(x)$ não é uma função escada...

...por exemplo, isto vale pra "nossa função preferida" das primeiras aulas, $f(x)=4-(x-2)^2$, cujo gráfico é um pedaço de parábola.

Exercício 9.

Sejam $f(x) = 4 - (x-2)^2$ e $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$.

a) Verifique que a função F é uma primitiva para a f.

b) Verifique que a função $G(x) = F(x) + 200$ é uma outra primitiva para a f.

c) Calcule $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$ usando isto aqui:

$$\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx = F(4) - F(0)$$

d) Relembre os modos de obter aproximações para integrais que você aprendeu muitas aulas atrás... por exemplo, o método dos trapézios dá resultados bastante bons. Compare os resultados dessas aproximações com o resultado exato da área $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$ que você acabou de obter.