Cálculo 2 - 2020.2

Aula 14: integração por substituição.

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

Nos slides anteriores nós vimos como demonstrar a fórmula [S2], e *começamos* a ver como usá-la na prática... na verdade a gente costuma usar uma versão da [S2] para integrais *indefinidas*, em que a gente primeiro faz as contas de uma forma abreviada, omitindo todos os limites de integração e depois a gente recoloca eles.

A nossa versão para integrais indefinidas da [S2] vai ser a [S2I] do próximo slide. Repare na linha

"Obs: $u = g(x)$"

no final da [S2I] — ela vai ser importante pra evitar ambiguidades.

No slide seguinte eu pus a nossa versão para integrais indefinidas da [S3], que eu chamei de [S3I].

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S2I}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S3}] \quad = \quad \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel \\ \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$[\mathsf{S3I}] \quad = \quad \begin{pmatrix} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{pmatrix}$$

Exercício 1.
Calcule os resultados das substituições abaixo:

a) $[\mathsf{S2I}]\,[g(x) := 3x + 4]$
b) $[\mathsf{S2I}]\,[g(x) := 3x + 4]\,[f(u) := \frac{2}{3}\cos u]$
c) $[\mathsf{S3I}]\,[g(x) := 3x + 4]$
d) $[\mathsf{S3I}]\,[g(x) := 3x + 4]\,[f(u) := \frac{2}{3}\cos u]$

Mais dicas sobre a operação '[:=]'

Nas duas substituições abaixo a primeira está certa
e a segunda está errada:

$$\begin{array}{rcl} (x+2=5)\,[x:=4] & = & (4+2=5) \\ (x+2=5)\,[x:=4] & = & (6=5) \end{array}$$

O '=' depois de uma substituição tem um significado especial: a pronúncia dele é "o resultado da substituição à esquerda é a expressão à direita", e na segunda linha a gente fez mais coisas além de só substituir todos os 'x's por '4's.

Note que isto aqui está certo:

$$\begin{array}{rcl} (x+2=5)\,[x:=4] & = & (4+2=5) \\ & = & (6=5) \end{array}$$

Mais dicas sobre a operação '[:=]' (2)

Aqui a primeira está certa e a segunda está errada...
Na segunda um 'u' foi substituido por 'e^{2x}'!!!!!!!! $=($

$$\left(\begin{array}{c} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u=g(x). \end{array}\right)[g(x):=e^{2x}] \quad = \quad \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int f(2^{2x})(2e^{2x})\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u=e^{2x}. \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u=g(x). \end{array}\right)[g(x):=e^{2x}] \quad = \quad \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int f(2^{2x})(2e^{2x})\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(e^{2x})\,du \\ \text{Obs: } u=e^{2x}. \end{array}\right)$$

Mais dicas sobre a operação '[:=]' (3)

No primeiro PDF do curso nós usamos a operação '[:=]' para testar EDOs como $f'(x) = x^4$ em vários "valores" de f, pra tentar resolver EDOs por chutar-e-testar... Em

$$(f'(x) = x^4)\,[f(x) := x^2] = (2x = x^4)$$

na expressão original, $(f'(x) = x^4)$, o símbolo f faz o papel de uma função qualquer, ou de uma variável cujo valor é uma função; a substiuição "$[f(x) := x^2]$" diz como substituir a f original, genérica, pela f que tem esta *definição* aqui: $f(x) = x^2$... e nós já temos bastante prática com obter consequencias de uma definição como $f(x) = x^2$. Por exemplo:

$$\begin{array}{rcl}
f(200) &=& 200^2 \\
f(3u+4) &=& (3u+4)^2 \\
f(42x^3+99) &=& (42x^3+99)^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
f'(x) &=& 2x \\
f'(3u+4) &=& 2(3u+4) \\
f'(42x^3+99) &=& 2(42x^3+99)
\end{array}$$

Exemplo com gambiarras

Isto aqui é um exemplo de como contas com integração por substituição costumam ser feitas na prática:

$$
\begin{aligned}
&\int 2\cos(3x+4)\,dx \\
&= \int 2(\cos u)\cdot \frac{1}{3}\,du \\
&= \frac{2}{3}\int \cos u\,du \\
&= \frac{2}{3}\operatorname{sen} u \\
&= \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3x+4)
\end{aligned}
$$

A "Obs: $u = 3x + 4$" costuma ser posta no texto em português antes ou depois das contas, ou omitida (!!!)...

A gambiarra nos livros
Dê uma olhada na página 165 do Martins/Martins.
Eles pulam **MUITOS** passos, e dizem

> Fazendo $u = g(x)$, $du = g'(x)\,dx$, e substituindo em (A)...

A idéia é esta aqui:

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\; \underbrace{\underbrace{g'(x)}_{\frac{du}{dx}}\; dx}_{du} \;=\; \int f(u)\,du$$

mas nós só vamos ver um jeito de dar um significado
preciso pra esse "$\frac{du}{dx}dx = du$" em Cálculo 3...
(Dê uma olhada também na "Aula 4" da Cristiane Hernández).

Exercício 2.

a) Faça as gambiarras do slide anterior nesta integral daqui,

$$\int (1-(\operatorname{sen} x)^2)(\operatorname{sen} x)^3 \cos x \, dx$$

para transformá-la numa integral em u. Use $u = \operatorname{sen} x$.

b) Resolva a integral em u que você acabou de obter.
(O resultado dela vai ser um polinômio em u).

c) Junte tudo numa série de igualdades como as do "exemplo com gambiarras". No final você deve chegar num expressão em x sem sinal de integral.

Integrais de potências de senos e cossenos

Exemplo 1

$$
\begin{aligned}
&\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 \, dx \\
&= \int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 (\cos x) \, dx \\
&= \int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^5 \underbrace{(\cos x)^2}_{1-s^2} \underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}} \, dx \\
&= \int s^5 (1 - s^2) \, ds \\
&= \int s^5 - s^7 \, ds \\
&= \frac{s^6}{6} - \frac{s^8}{8} \\
&= \frac{(\operatorname{sen} x)^6}{6} - \frac{(\operatorname{sen} x)^8}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\left[\begin{array}{c}
s = \operatorname{sen} x \\
\frac{ds}{dx} = \cos x \\
\operatorname{sen} x = s \\
(\cos x)^2 = 1 - s^2 \\
\cos x \, dx = ds
\end{array} \right]
$$

Exemplo 1: verificação

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\frac{(\operatorname{sen} x)^6}{6} - \frac{(\operatorname{sen} x)^7}{7}\right) \\
&= \frac{6(\operatorname{sen} x)^5 \cos x}{6} - \frac{8(\operatorname{sen} x)^7 \cos x}{8} \\
&= ((\operatorname{sen} x)^5 - (\operatorname{sen} x)^7) \cos x \\
&= ((\operatorname{sen} x)^5 (1 - (\operatorname{sen} x)^2)) \cos x \\
&= (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 \cos x \\
&= (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3
\end{aligned}
$$

As anotações à direita

Note que à direita das contas do exemplo 1 tinha isso aqui:

$$\begin{bmatrix} s = \operatorname{sen} x \\ \frac{ds}{dx} = \cos x \\ \operatorname{sen} x = s \\ (\cos x)^2 = 1 - s^2 \\ \cos x \, dx = ds \end{bmatrix}$$

que à primeira vista parece com a operação '[:=]',
mas exceto pela primeira linha ele não segue nenhuma
das convenções sobre o '[:=]' que vimos aqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-intro.pdf#page=6

E ainda por cima ele é usado duas vezes, uma pra mudar
de x pra s e outra pra voltar pra x!...

Exemplo 2

$$\begin{aligned}
&\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 \, dx \\
= \quad & \int (\operatorname{sen} x)^4 (\cos x)^2 \operatorname{sen} x \, dx \\
= \quad & \int (\underbrace{(\operatorname{sen} x)^2}_{1-c^2})^2 \underbrace{(\cos x)^2}_{c^2} \underbrace{(\operatorname{sen} x)}_{-\frac{dc}{dx}} \, dx \\
= \quad & \int (1 - c^2)^2 c^2 \, dc \\
= \quad & \int (c^4 - 2c^2 + 1) c^2 (-1) \, dc \\
= \quad & \int -c^6 + 2c^4 - c^2 \, dc \\
= \quad & \ldots
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c}
c = \cos x \\
\frac{dc}{dx} = -\operatorname{sen} x \\
\cos x = c \\
(\operatorname{sen} x)^2 = 1 - c^2 \\
\operatorname{sen} x \, dx = (-1) \, dc
\end{array}\right]$$

Exercício 3.

a) Calcule a integral do exemplo 1 – $\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 \, dx$ – usando a substituição $c = \cos x$ ao invés de $s = \operatorname{sen} x$.

b) Teste o seu resultado.

Dica: em algum lugar do teste você vai precisar da identidade $(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 = 1$... nós vamos começar a usar identidades trigonométricas a beça.

Dica importante

Pra integrar algo como:

$$\int (\operatorname{sen} x)^\alpha (\cos x)^\beta \, dx$$

Se tanto α quanto β são ímpares as duas subtituições, $s = \operatorname{sen} x$ e $c = \cos x$, funcionam.

Se só um dos dois é ímpar só uma delas funciona (não vou dizer qual).

Se tanto α quanto β são pares aí nenhuma das duas substituições funciona, e a gente vai precisar de técnicas mais avançadas que vamos ver depois.

Introdução à Substituição Trigonométrica

$$
\begin{aligned}
&\int s\sqrt{1-s^2}\,ds \\
=\ &\int \operatorname{sen}\theta\sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}\cos\theta\,d\theta \\
=\ &\int \operatorname{sen}\theta\sqrt{(\cos\theta)^2}\cos\theta\,d\theta \\
=\ &\int \operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\theta\,d\theta \\
=\ &\int (\cos\theta)^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
=\ &\int c^2\cdot(-1)\,dc \\
=\ &-\tfrac{1}{3}c^3 \\
=\ &-\tfrac{1}{3}(\cos\theta)^3 \\
=\ &-\tfrac{1}{3}(\sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2})^3 \\
=\ &-\tfrac{1}{3}(\sqrt{1-s^2})^3
\end{aligned}
$$

$$
\left[\begin{array}{c}
s = \operatorname{sen}\theta \\
\frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\
\cos\theta\,d\theta = ds
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{c}
c = \cos\theta \\
\frac{dc}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta \\
\operatorname{sen}\theta\,d\theta = (-1)\cdot dc
\end{array}\right]
$$

O exemplo da página anterior usa um monte de técnicas nada óbvias. A das cinco primeiras linhas dá isso aqui,

$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds = \int (\cos\theta)^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

Nós vamos começar aprendendo a fazer algo um pouco mais geral: vamos aprender a ajustar os 'α's, 'β's, 'γ's e 'δ's aqui,

$$\int s^\alpha(\sqrt{1-s^2})^\beta\,ds = \int (\cos\theta)^\gamma(\operatorname{sen}\theta)^\delta\,d\theta$$

e vamos aprender a fazer algo parecido para as substituições $t = \tan\theta$ e $z = \sec\theta$.

Eu vou chamar o '$\sqrt{1-s^2}$' de "o termo malvado" da integral $\int s\sqrt{1-s^2}\,ds$. É ele que faz essa integral ser muito difícil de resolver, e queremos nos livrar dele.

Abreviações

No exemplão do slide 20 as letras s, θ e c sempre denotam variáveis, exceto nas linhas

$$\frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \qquad \text{e} \qquad \frac{dc}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta$$

das anotações, que usam a "notação de Leibniz", na qual podemos definir coisas como "$s = \operatorname{sen}\theta$" e "$c = \cos\theta$" e aí tratar os '$s$'s e '$c$'s como abreviações para $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$...

Essas abreviações dão margem pra muita confusão e fazem as pessoas cometerem zilhões de erros de conta nos primeiros anos até elas terem vários anos de prática. Como vocês não têm anos pra praticar, nem têm bibliotecas super confortáveis em que vocês podem passar centenas de tardes estudando e discutindo junto com os colegas, nós só vamos usar essas abreviações em situações controladas.

Algumas identidades trigonométricas

A minha memória é péssima. Eu não consigo decorar praticamente nenhuma fórmula... mas eu consigo lembrar vagamente como rededuzir certas fórmulas, e aí eu sempre refaço as demonstrações.

No caso das identidades trigonométricas eu consigo rededuzir elas bastante rápido usando essas abreviações aqui embaixo à esquerda, e as fórmulas pra derivadas de produtos e quocientes de funções à direita:

$$
\begin{array}{rcl}
f &=& f(x) \\
g &=& g(x) \\
s &=& \operatorname{sen}\theta \\
c &=& \cos\theta \\
t &=& \tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{s}{c} \\
z &=& \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{1}{c}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{g} &=& \dfrac{g'}{g^2} \\
\dfrac{d}{dx}\dfrac{f}{g} &=& \dfrac{fg' - f'g}{g^2}
\end{array}
$$

Algumas identidades trigonométricas (2)

$$\begin{aligned} z^2 &= (\tfrac{1}{c})^2 = \tfrac{1}{c^2} = \tfrac{c^2+s^2}{c^2} = \tfrac{c^2}{c^2} + \tfrac{s^2}{c^2} \\ &= 1 + (\tfrac{s}{c})^2 \\ &= 1 + t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} c^2 + s^2 = 1 & \\ c^2 = 1 - s^2 & c = \sqrt{1 - s^2} \\ s^2 = 1 - c^2 & s = \sqrt{1 - c^2} \\ z^2 = 1 + t^2 & z = \sqrt{1 + t^2} \\ t^2 = z^2 - 1 & t = \sqrt{z^2 - 1} \end{array}$$

Algumas identidades trigonométricas (3)

$$\frac{ds}{d\theta} = c$$
$$\frac{dc}{d\theta} = -s$$
$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{s}{c} = \frac{s'c - sc'}{c^2} = \frac{cc - s\cdot(-s)}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2$$
$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{1}{c} = \frac{-c'}{c^2} = \frac{s}{c^2} = \frac{1}{c}\frac{s}{c} = zt$$

$$ds = \cos\theta\, d\theta$$

$$dc = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$dt = -(\sec\theta)^2\, d\theta$$

$$dz = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$$