Cálculo 2 - 2020.2

Aula 1: Introdução ao curso (e a EDOs e ao [:=])

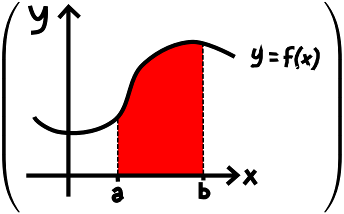
Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

1 Introdução ao curso

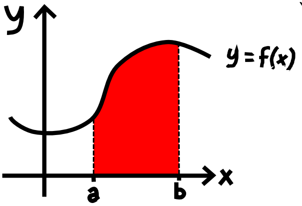
O curso de Cálculo 2 é principalmente sobre dois assuntos: **integrais**, e **equações diferenciais ordinárias**. Nós vamos abreviar "equação diferencial ordinária" como "EDO"; existem também as *equações diferenciais parciais*, ou EDPs, que são um assunto beeem mais complicado.

Integrais são áreas. A expressão $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ quer dizer "a área sob a curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$". Mais visualmente,

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \text{Área}$$



$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \text{Área}\left(\quad \right)$$



Pra aprender a calcular essas áreas a gente vai ter que aprender a aproximá-las por somas de retângulos – um limite complicado! – e os detalhes vão dar um trabalhão... =(

Repare, a área em vermelho é delimitada:

por cima pela curva $y = f(x)$,

pela esquerda pela reta $x = a$,

pela direita pela reta $x = b$,

por baixo pela reta $y = 0$.

Equações diferenciais (lembre: "ordinárias" $\to$ "EDOs") são um pouco mais complicadas do que as equações que já sabemos resolver...

1)	$x + 2 = 5$	Equação de 1º grau
2)	$x^2 + 3 = 7$	Eq. de 2º grau simples
3)	$x^2 + x = 6$	Eq. de 2º grau mais complicada
4)	$f'(x) = x^4$	EDO simples
	ou: $\frac{d}{dx} f(x) = x^4$	f é a váriavel/incógnita!!!
5)	$f'(x) = 2f(x)$	EDO mais complicada
6)	$f''(x) + f'(x) = 6f(x)$	idem
7)	$f'(x) = -1/f(x)$	idem
8)	$f'(x) = -x/f(x)$	idem

Na passagem de (1) para (2) e (3) as equações ficaram mais complicadas porque o x passou a poder aparecer elevado ao quadrado.

No (4) estamos procurando uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que obedeça $f'(x) = x^4$ para todo x. Esse "para todo x" fica implícito.

2 Chutar e testar

Nosso primeiro método de resolver equações vai ser chutar e testar – nós vamos chutar valores pra incógnita e ver se algum deles é uma solução.

Aprender a testar vai ser A coisa mais importante do curso.

Neste curso nós vamos usar duas coisas que não são padrão em cursos de Cálculo 2:

1) Uma notação — que normalmente só o pessoal de Computação aprende, e só em cursos avançados... — para substituição de variáveis em expressões arbitrárias,

2) Nós vamos usar a fórmula $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ a beça.

Nós vamos reescrever isto:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Se substituirmos } x \text{ por } 10a+b \\ \text{e } y \text{ por } 3c+4d \text{ em:} \\ \qquad\qquad x^y + 2x \\ \text{obtemos:} \\ \qquad (10a+b)^{3c+4d} + 2(10a+b)\end{array}}$$

deste jeito:

$$(x^y + 2x)\begin{bmatrix} x := 10a+b \\ y := 3c+4d \end{bmatrix} = (10a+b)^{3c+4d} + 2(10a+b)$$

Repare: em

$$(x^y + 2x)\begin{bmatrix} x := 10a + b \\ y := 3c + 4d \end{bmatrix}$$

$$= (10a + b)^{3c+4d} + 2(10a + b)$$

a notação é

$$\text{(expressão original)[substituições]} = \text{(expressão nova)}$$

e cada uma das substituições é da forma:

$$\text{variável} := \text{expressão}$$

A notação '[:=]' vai ser bem prática pra gente fazer hipóteses e testá-las. Por exemplo, digamos que queremos testar se 2 e 3 são soluções da equação $x + 2 = 5$...

$$\begin{array}{rcl}
(x + 2 = 5)[x := 2] & = & (2 + 2 = 5) \\
& = & (4 = 5) \\
& = & \mathbf{F} \\
(x + 2 = 5)[x := 3] & = & (3 + 2 = 5) \\
& = & (5 = 5) \\
& = & \mathbf{V}
\end{array}$$

Note que os '='s das expressões entre parênteses são comparações – como a operação '`==`' do `C` – e retornam ou **V** ("Verdadeiro") ou **F** ("Falso").

“Eu só vou corrigir os sinais de igual”

Uma dos slogans que eu mais vou repetir quando estiver tirando dúvidas ou corrigindo exercícios de vocês é “Eu só vou corrigir os sinais de igual”.

Em Cálculo 1 muita gente se enrola com a fórmula da regra da cadeia – porque se enrola na hora de substituir os ‘f’s, ‘g’s, ‘f'’s e ‘g'’s nela... uma das fórmulas mais importantes, e mais difíceis de acreditar, de Cálculo 2 é a da Integração por Substituição, que é BEEEEM pior do que a Regra da Cadeia. O operador de substituição, “[:=], que não tem nada a ver com a Integração por Substituição, vai nos ajudar bastante a aplicar essas fórmulas passo a passo sem a gente se perder.

Vamos precisar de alguns truques novos...

Exemplo: regra da cadeia

Primeiro vou inventar uma abreviação para a regra da cadeia.

Obs: vários dos truques que vamos usar agora são inspirados em notações de Teoria da Computação e não são padrão!!! Não use eles em outros cursos!!! **Os professores podem não entender e podem ficar putos!!!**

O ':=' abaixo é uma atribuição, como o '`=`' do `C`. A linha abaixo quer dizer: "a partir de agora o valor de $[RC]$ vai ser a expressão entre os parênteses grandes.

$$[RC] \quad := \quad \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Exemplo: regra da cadeia (2)
Continuando...

$$[RC] \quad := \quad \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Então:

$$\begin{array}{rcl}
[RC]\left[f := \mathrm{sen}\right] & = & \left(\frac{d}{dx}\mathrm{sen}(g(x)) = \mathrm{sen}'(g(x))g'(x)\right) \\
[RC]\left[f(u) := \mathrm{sen}\,u\right] & = & \left(\frac{d}{dx}\mathrm{sen}(g(x)) = \mathrm{sen}'(g(x))g'(x)\right) \\
[RC]\left[\begin{array}{rcl} f(u) & := & u^4 \\ f'(u) & := & 4u^3 \end{array}\right] & = & \left(\frac{d}{dx}(g(x))^4 = 4(g(x))^3 g'(x)\right)
\end{array}$$

Repare que agora estamos substituindo o 'f' como se ele fosse uma variável – mas precisamos de gambiarras novas. No caso do meio escrevemos $f(u) := \mathrm{sen}\,u$ ao invés de $f := \mathrm{sen}$, e...

$$[RC] \quad := \quad \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

$$\begin{array}{rcl}
[RC]\left[f := \operatorname{sen}\right] & = & \left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(g(x)) = \operatorname{sen}'(g(x))g'(x)\right) \\
[RC]\left[f(u) := \operatorname{sen} u\right] & = & \left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(g(x)) = \operatorname{sen}'(g(x))g'(x)\right) \\
[RC]\begin{bmatrix} f(u) := u^4 \\ f'(u) := 4u^3 \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}(g(x))^4 = 4(g(x))^3 g'(x)\right)
\end{array}$$

...e no caso de baixo acrescentamos uma linha "$f'(u) := 4u^3$" na lista de substituições. Essa linha é uma consequencia da linha "$f(u) := u^4$", e ela está lá só pra ajudar a gente a se enrolar menos.

Exercício

Tente resolver as EDOs abaixo (de um dos primeiros slides) por chutar e testar.

4)	$f'(x) = x^4$	EDO simples
	ou: $\frac{d}{dx} f(x) = x^4$	f é a váriavel/incógnita!!!
5)	$f'(x) = 2f(x)$	EDO mais complicada
6)	$f''(x) + f'(x) = 6f(x)$	idem
7)	$f'(x) = -1/f(x)$	idem
8)	$f'(x) = -x/f(x)$	idem

Sugestão: comece testando $f(x) = x^3$, $f(x) = x^5$, $f(x) = 200x^5+42$, $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{42x}$, $f(x) = e^{2x}$, $f(x) = e^{3x}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.