# Cálculo 2 - 2020.2

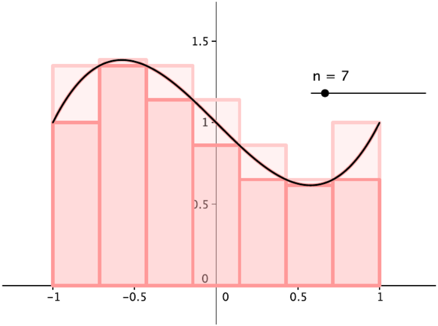
Aula 4: Integrais como somas de retângulos (2)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

**Aproximações por cima e por baixo**

Uma das figuras na p.2 das notas da Cristiane Hernández é esta:




Ela mostra uma tentativa de calcular uma integral fazendo uma *aproximação por retângulos por baixo* e uma *aproximação por retângulos por cima* para $y = f(x)$ no intervalo entre $x = -1$ e $x = 1$. A curva $y = f(x)$ fica entre estas duas aproximações.

## Porque aprender isto

As definições *formais* de “aproximação por retângulos por baixo” e “aproximação por retângulos por cima” são bem trabalhosas. Elas envolvem alguns truques com conjuntos infinitos, “para todo” e “existe”, que a maioria dos livros de Cálculo pula...

Nós vamos ver essas definições em detalhes porque entendê-las e aprender a visualizar cada subexpressão delas vai acabar sendo muito útil pras próximas matérias de Matemática do curso de vocês.

No material da aula 2 eu pedi pra vocês aprenderem a fazer certos desenhos sem contas, chamei isso de o “jeito esperto”, e disse que fazê-los calculando todas as coordenadas era o “jeito burro”. Na discussão desse material pelo Telegram a Eduarda me pediu pra explicar melhor isso, e eu dei essa explicação aqui...

Tenta aprender a não fazer as contas... se você fizer tudo pelas contas você vai demorar muito mais e não vai descobrir um monte de truques importantes que a gente só descobre se a gente tenta aprender a visualizar tudo geometricamente...

Acho que eu tenho um exemplo bom.

Num dos primeiros slides eu usei uma figura copiada das notas da Cristiane Hernandez em que ela usa uma partição com 7 intervalos - ela até escreveu do lado "$n = 7$"...

Daqui a pouco a gente vai ter que usar figuras — que a gente não vai poder desenhar explicitamente com todos os detalhes — com 10 intervalos, ou 100, ou 1000, ou um milhão de intervalos

Se você aprender a visualizar tudo sem contas você vai conseguir visualizar a figura com um milhão de intervalos em poucos segundos.

E se você tiver que fazer as contas pra um milhão de intervalos você vai gastar um tempo que a gente não tem =(

## Imagens de conjuntos

Dê uma olhada na seção 1.3 do Martins/Martins.
Nós vamos usar uma notação um pouco diferente da deles.
Se $f : A \to \mathbb{R}$ (obs: $A = \mathsf{dom}(f)$),

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{gr}_f & = & \{\, (x, f(x)) \mid x \in A \,\}, \\
\mathsf{im}_f & = & \{\, f(x) \mid x \in A \,\}, \\
\mathsf{gr}_f(B) & = & \{\, (x, f(x)) \mid x \in B \,\}, \\
F(B) & = & \{\, f(x) \mid x \in B \,\},
\end{array}
$$

Por exemplo, se

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

e $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ então:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{gr}_f(B) & = & \mathsf{gr}_f(\{-1, 0, 1, 2\}), \\ & = & \{\, (x, f(x)) \mid x \in \{-1, 0, 1, 2\} \,\} \\ & = & \{(-1, f(-1)), (0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2))\} \\ & = & \{(-1, (-1)^2), (0, 0^2), (1, 1^2), (2, 2^2)\} \\ & = & \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\} \\ F(B) & = & \{\, f(x) \mid x \in \{-1, 0, 1, 2\} \,\} \\ & = & \{(-1)^2, 0^2, 1^2, 2^2\} \\ & = & \{1, 0, 1, 4\} \\ & = & \{0, 1, 4\} \end{array}$$

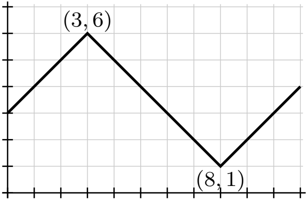
Se visualizarmos $B$ como um subconjunto do eixo $x$
então $\mathsf{gr}_f(B)$ é o resultado de "levantar" cada ponto de $B$
para o ponto correspondente no gráfico de $f$,
e $F(B)$ é o resultado de projetar todos os pontos de $\mathsf{gr}_f(B)$
no eixo $y$.

**Exercício 1.**
Sejam $f(x) = x^2$ e $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$.
a) Calcule $F(B)$.
b) Calcule $\mathsf{gr}_f(B)$.
c) Represente graficamente num gráfico só: $B$ "como um subconjunto do eixo $x$", $\mathsf{gr}_f(B)$, $F(B)$ "como um subconjunto do eixo $y$".
d) Represente graficamente num (outro) gráfico só: $B$ "como um subconjunto do eixo $y$", $\mathsf{gr}_f(B)$, $F(B)$ "como um subconjunto do eixo $y$".

## Imagens de intervalos

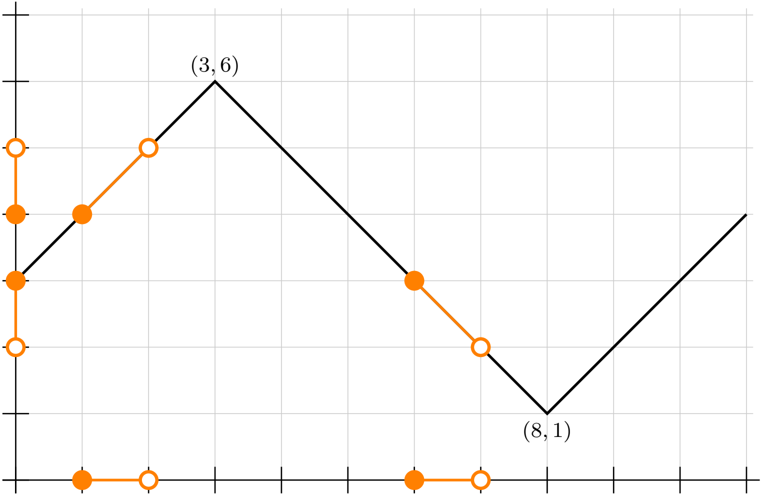
Seja:

$f(x) =$




$$= \begin{cases} x+3 & \text{quando } x \leq 3, \\ 9-x & \text{quando } 3 < x < 8, \\ x-7 & \text{quando } 8 \leq x \end{cases}$$

Se $B$ é um conjunto infinito —
por exemplo, $B = [1,2) \cup [6,7)$ —
não dá pra calcularmos $\mathsf{gr}_f(B)$ e $F(B)$
fazendo as contas pra todos os pontos...
É melhor fazer desenhos.




Neste caso temos
$F([1,2) \cup [6,7)) = (2,3] \cup [4,5)$.

**Exercício 2.**
Seja $f$ a função definida dois slides atrás.
Calcule:
a) $F([2,3))$
b) $F([2,4))$
c) $F((2,4))$
d) $F((2,9))$
e) $F([1,2) \cup [4,5))$
f) $F([1,2) \cup \{3\} \cup [4,5))$

**Exercício 3.**
Para cada uma dos proposições abaixo diga se ela é verdadeira ou falsa.
a) $\forall x \in [7, 9]. \, 1 < f(x)$
b) $\forall x \in [7, 9]. \, 1 \leq f(x)$
c) $\exists x \in [7, 9]. \, 1 < f(x)$
d) $\exists x \in [7, 9]. \, 1 \leq f(x)$

Da mesma forma que podemos definir funções
nós podemos definir proposições.
Uma proposição é uma função que retorna **V** ou **F**.
Seja $P(y) = (\forall x \in [7,9].\, y \leq f(x))$.

**Exercício 4.**
Para cada uma das proposições abaixo
diga se ela é verdadeira ou falsa.
a) $P(0.5)$
b) $P(0.99)$
c) $P(1)$
d) $P(1.01)$
e) $P(2)$

**Exercício 5.**
Calcule os dois conjuntos abaixo:
a) $L = \{\, y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in [7,9].\, y \leq f(x) \,\}$
b) $U = \{\, y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in [7,9].\, f(x) \leq y \,\}$
e:
c) Represente o conjunto $L$ no eixo $y$.
d) Represente o conjunto $U$ no eixo $y$.
e) Represente o conjunto $L$ usando notação de intervalos — algo como: "$L = [42, 99) \cup \{200\} \cup (420, +\infty)$".
f) Represente o conjunto $U$ usando notação de intervalos.

**Exercício 6.**
Seja $M(y) = (y \in L \text{ e } \forall y' \in L.\, y' \leq y)$ —
ou, equivalentemente, $M(y) = (y \in L \text{ e } \forall z \in L.\, z \leq y)$.
Para cada uma das proposições abaixo
diga se ela é verdadeira ou falsa.
a) $M(4)$
b) $M(2)$
c) $M(0)$
d) $M(0.5)$
e) $M(1)$

(Obs: este slide é uma versão melhorada do slide do exercício 7!)
Alguns slides atrás nós definimos:

$$\begin{array}{rcl} L & = & \{\, y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in [7,9].\, y \leq f(x) \,\} \\ M(y) & = & (y \in L \text{ e } \forall z \in L.\, z \leq y) \end{array}$$

Agora vamos generalizar o $L$ de dois jeitos:

$$\begin{array}{rcl} L(B) & = & \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall b \in B.\, y \leq f(b) \,\} \\ I(C) & = & \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall c \in C.\, y \leq c \,\} \end{array}$$

**Exercício 7':**

a) Calcule $L([7,9])$.

b) Verifique que $L([7,9]) = I(F([7,9]))$.

c) $L(B) = I(F(B))$ vai ser verdade pra qualquer conjunto $B$? Porquê?

(Obs: este slide é uma versão melhorada do slide do exercício 8!)

Agora vamos generalizar o $M$ e definir o inf...

$$\begin{array}{rcl} L(B) & = & \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall b \in B.\, y \leq f(b) \,\} \\ I(C) & = & \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall c \in C.\, y \leq c \,\} \\ M(y, D) & = & (y \in D \text{ e } \forall d \in D.\, d \leq y) \\ y \text{ é o inf de } C & = & (y \in I(C) \text{ e } \forall d \in I(C).\, d \leq y) \end{array}$$

**Exercício 8':**

a) Calcule $I([2,3])$ e $I((2,3))$.

b) Calcule $M(1, [-\infty, 2])$, $M(2, [-\infty, 2])$, $M(3, [-\infty, 2])$.

c) Calcule o valor de "1 é o inf de {2,3,4}". Deve dar **V** ou **F**.

d) Calcule "2 é o inf de {2,3,4}" e "3 é o inf de {2,3,4}".

e) Calcule $I(\mathbb{R})$.

f) Calcule $I(\emptyset)$.

(Obs: este slide é uma versão melhorada do slide do exercício 9!)

Agora vamos definir o sup:

$$\begin{array}{rcl}
U(B) & = & \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall b \in B.\, f(b) \leq y \,\} \\
S(C) & = & \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall c \in C.\, c \leq y \,\} \\
N(y, D) & = & (y \in D \text{ e } \forall d \in D.\, y \leq d) \\
y \text{ é o sup de } C & = & (y \in S(C) \text{ e } \forall d \in S(C).\, y \leq d)
\end{array}$$

**Exercício 9':**

a) Calcule $S([2,3])$ e $S((2,3))$.

b) Calcule $N(2, [3, +\infty])$, $N(3, [3, +\infty])$, $N(4, [3, +\infty])$.

c) Calcule o valor de "5 é o sup de {2,3,4}". Deve dar **V** ou **F**.

d) Calcule "3 é o sup de {2,3,4}" e "4 é o sup de {2,3,4}".

e) Calcule $S(\mathbb{R})$.

f) Calcule $S(\emptyset)$.

Alguns slides atrás nós definimos:

$$\begin{array}{rcl} L & = & \{\, y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in [7,9].\, y \leq f(x) \,\} \\ M(y) & = & (y \in L \text{ e } \forall z \in L.\, z \leq y) \end{array}$$

Agora vamos generalizar isto para:

$$\begin{array}{rcl} L(C) & = & \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall x \in C.\, y \leq f(x) \,\} \\ M(y, C) & = & (y \in L(C) \text{ e } \forall z \in L(C).\, z \leq y) \end{array}$$

**Exercício 7.**

Calcule:

a) $L((2,3] \cup [4,5))$

b) $M(0,\ (2,3] \cup [4,5))$

c) $M(1,\ (2,3] \cup [4,5))$

d) $M(2,\ (2,3] \cup [4,5))$

e) $M(3,\ (2,3] \cup [4,5))$

E agora vamos definir o "ínfimo" de um conjunto $C$:

$$\begin{array}{rcl} L(C) & = & \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall x \in C.\, y \leq f(x) \,\} \\ M(y, C) & = & (y \in L(C) \text{ e } \forall z \in L(C).\, z \leq y) \\ y \text{ é o inf de C} & = & (y \in L(C) \text{ e } \forall z \in L(C).\, z \leq y) \end{array}$$

**Exercício 8.**
Para cada uma das proposições abaixo
diga se ela é verdadeira ou falsa.
a) 1 é o inf de $(2,3] \cup [4,5)$
b) 2 é o inf de $(2,3] \cup [4,5)$
c) 3 é o inf de $(2,3] \cup [4,5)$
d) 0 é o inf de $\mathbb{R}$
e) $-\infty$ é o inf de $\mathbb{R}$
f) $-\infty$ é o inf de $\emptyset$
g) $+\infty$ é o inf de $\emptyset$

**Exercício 9.**

Vamos definir $L(C)$ da seguinte forma:

$$L(C) = \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} \mid \forall c \in C.\, y \leq c \,\}$$

Calcule:
a) $L([2,3])$
b) $L(\{2,3\})$
c) $L([2,3))$
d) $L((2,3))$ (repare que este (2,3) é um intervalo aberto!)
e) $L((-4,-3))$ (idem!)
f) $L(\mathbb{R})$
g) $L(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$
h) $L(\emptyset)$

E agora vamos definir o "supremo" de um conjunto $C$.
Compare:

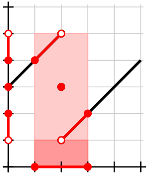
$$\begin{array}{rcl}
L(C) & = & \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall x \in C.\, y \leq f(x) \,\} \\
M(y,C) & = & (y \in L(C) \text{ e } \forall z \in L(C).\, z \leq y) \\
y \text{ é o inf de C} & = & (y \in L(C) \text{ e } \forall z \in L(C).\, z \leq y)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
U(C) & = & \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall x \in C.\, f(x) \leq y \,\} \\
M'(y,C) & = & (y \in U(C) \text{ e } \forall w \in U(C).\, y \leq w) \\
y \text{ é o sup de C} & = & (y \in U(C) \text{ e } \forall w \in U(C).\, y \leq w)
\end{array}$$

Infs e sups vão nos permitir definir o "retângulo mais alto sob a curva $y = f(x)$" e o "retângulo mais baixo sobre a curva $y = f(x)$" de um modo que funciona até quando a $f$ é descontínua...

Veja o "exemplão" da próxima página.

**Exemplão: métodos do sup e do inf**

Seja $f(x) =$  $= \begin{cases} x+3 & \text{quando } x<2, \\ 3 & \text{quando } x=2, \\ x-1 & \text{quando } 2<x. \end{cases}$

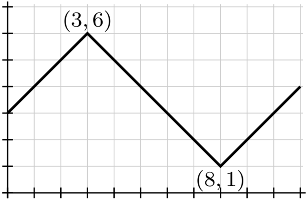
$$\begin{array}{lrcl}
\text{Seja} & B & = & [1,3]. \\
\text{Então} & F(B) & = & (1,2)\cup\{3\}\cup[4,5), \\
 & U(F(B)) & = & [5,+\infty], \\
 & L(F(B)) & = & [-\infty,1], \\
 & \sup(F(B)) & = & 5, \\
 & \inf(F(B)) & = & 1,
\end{array}$$

$\sup(F([1,3]))\cdot(3-1)$ é o retângulo mais claro,
$\inf(F([1,3]))\cdot(3-1)$ é o retângulo mais escuro...

**Exercício 10.**

Seja:

$f(x) =$




$$= \begin{cases} x+3 & \text{quando } x \leq 3, \\ 9-x & \text{quando } 3 < x < 8, \\ x-7 & \text{quando } 8 \leq x \end{cases}$$

Seja $P = \{1, 2, 4, 5, 7, 9, 10\}$.

Represente graficamente:

a) $\sum_{i=1}^{N} \inf(F([a_i, b_i])) \cdot (b_i - a_i)$

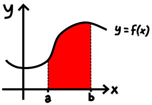
b) $\sum_{i=1}^{N} \sup(F([a_i, b_i])) \cdot (b_i - a_i)$

Dica: represente o (a) e o (b) no mesmo gráfico usando retângulos de cores diferentes, como nas figuras das páginas 2 e 19.

## Aproximações por cima e por baixo

Na aula 1 nós vimos esta figura:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \text{Área}\left(\phantom{xx}\right)$$




As aproximações da integral de $f$ por retângulos por cima e por baixo dependem da escolha de uma partição $P$ do intervalo $[a, b]$. As definições formais são:

$$\begin{aligned}
\overline{\int}_P f(x)\,dx &= \textstyle\sum_{i=1}^N \sup(F([a_i, b_i])) \cdot (b_i - a_i) \\
\underline{\int}_P f(x)\,dx &= \textstyle\sum_{i=1}^N \inf(F([a_i, b_i])) \cdot (b_i - a_i)
\end{aligned}$$

**Exercício 11.**

Seja $f(x)$ a função do exercício 10.
Seja $P = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$.
Represente graficamente (num gráfico só)

$$f(x), \quad \underline{\int}_P f(x)\,dx, \quad \overline{\int}_P f(x)\,dx.$$

A diferença entre as duas aproximações, $\overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx$, corresponde à área em rosa claro nos slides 2 e 19.
Ela consiste num certo número de quadrados $1 \times 1$.
Quantos?

**Exercício 12.**

Faça a mesma coisa, mas agora para a partição
$P = \{1, 1.5, 2, 2.5, \ldots, 10\}$.

Agora a diferença $\overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx$

é feita de um certo número de quadrados
de dimensões $0.5 \times 0.5$.

Quantos?

**Exercício 13.**

Sejam:
$f(x) = 4 - (x-2)^2$,
$P_0 = \{0, 4\}$,
$P_1 = \{0, 2, 4\}$,
$P_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
$P_3 = \{0, 0.5, 1, 1.5, \ldots, 4\}$.

a) Represente graficamente $\overline{\int}_{P_3} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_3} f(x)\,dx$.

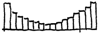
**Exercício 13 (cont.)**

b) Represente num gráfico só:
$\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$,
$\overline{\int}_{P_0} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_0} f(x)\,dx$,
$\overline{\int}_{P_1} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_1} f(x)\,dx$,
$\overline{\int}_{P_2} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_2} f(x)\,dx$,
$\overline{\int}_{P_3} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_3} f(x)\,dx$.

c) Seja $A = \overline{\int}_{P_3} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_3} f(x)\,dx$, considerado como um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado de retângulos, e $B$ o conjunto obtido a partir de $A$ deslizando cada retângulo de $A$ pra baixo como explicado no vídeo. Desenhe $B$ direito e obtenha uma estimativa para a área de $B$ seguindo as idéias do vídeo.

**Exercício 13 (cont.)**

d) Faça a mesma coisa que no item c, mas usando a partição $P_4$. Você deve obter algo desta forma:

$0 \leq \mathsf{Área}($$) \leq \underline{\qquad},$

onde o "$\underline{\qquad}$" é ou um número ou uma expressão fácil de calcular.

e) Faça a mesma coisa que no item d, mas usando a partição $P_5$.
f) Faça a mesma coisa que no item d, mas usando a partição $P_6$.

**Exercício 14.**

Repare que dá pra expressar a partição que divide o intervalo $[a, b]$ em $N$ partes iguais assim:

$$\{a,\ a + 1 \cdot \frac{b-a}{N},\ a + 2 \cdot \frac{b-a}{N}, \ldots,\ a + N \cdot \frac{b-a}{N}\}$$

a) Teste a fórmula acima para o caso $[a, b] = [2, 5]$, $N = 6$.
b) Teste a fórmula acima para o caso $[a, b] = [2, 5]$, $N = 7$.

Dica importante: no Ensino Médio os professores dizem pra sempre fazer "simplificações" como esta aqui: $2 + 4 \cdot \frac{5-2}{7} = \frac{26}{7}$. Em casos como a acima essas "simplificações" fazem com que os padrões fiquem muito mais difíceis de entender. Não seja como aqueles professores do Ensino Médio!

**Exercício 14 (cont.)**

Se estamos tentando integrar uma função no intervalo $[a, b]$ a nossa sequência preferida de partições para este intervalo vai ser definida por:

$$P_k = \{a,\ a + 1 \cdot \frac{b-a}{2^k},\ a + 2 \cdot \frac{b-a}{2^k}, \ldots, b\}$$

c) A partição $P_0$ tem quantos intervalos? E quantos pontos?
d) A partição $P_1$ tem quantos intervalos? E quantos pontos?
e) A partição $P_2$ tem quantos intervalos? E quantos pontos?
f) A partição $P_5$ tem quantos intervalos? E quantos pontos?

**Mais definições**

Defs:

$$\begin{aligned} \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty} \overline{\int}_{P_k} f(x)\,dx \text{ e} \\ \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty} \underline{\int}_{P_k} f(x)\,dx, \end{aligned}$$

onde $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$ é a nossa sequência preferida de partições para o intervalo $[a, b]$, que definimos no slide anterior.

**Exercício 15.**

Seja $f(x) = 4 - (x-2)^2$.

a) Represente graficamente $\overline{\int}_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$, representando todas as "$\overline{\int}_{P_k} f(x)\,dx$"s num gráfico só.

b) Represente graficamente $\underline{\int}_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$, representando todas as "$\underline{\int}_{P_k} f(x)\,dx$"s num gráfico só.

## As notas do Pierluigi Benevieri

Agora dê uma olhada nestas notas
de Cálculo 2 do Pierluigi Benevieri:

https://www.ime.usp.br/~pluigi/registro-MAT121-15.pdf

Nas páginas 3 e 4 ele define a integral (na definição 3) usando a "família de todas as partições do intervalo $[a, b]$"... isto é beeeem mais difícil de entender e visualizar do que o que eu fiz aqui, usando o limite na minha sequência preferida de partições do intervalo $[a, b]$...

**Exercício 16.**

a) Entenda a definição da Função de Dirichlet que o Pierluigi faz nas páginas 8 e 9, e que ele chama de $f(x)$ naquele trecho das notas.

b) Faça o gráfico dessa função $f(x)$.

Seja $[a, b] = [2, 5]$.

c) Represente graficamente $\overline{\int}_{P_k} f(x)\,dx$ e $\underline{\int}_{P_k} f(x)\,dx$ para $k = 0$, $k = 1$ e $k = 2$.

d) Convença-se de que

$$\overline{\int}_{x=2}^{x=5} f(x)\,dx = 3 \quad \text{e} \quad \underline{\int}_{x=2}^{x=5} f(x)\,dx = 0.$$

## A definição de integral

A nossa definição de $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ vai ser:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \;=\; \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \;\overset{\Downarrow}{=}\; \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

se a igualdade marcada com '$\overset{\Downarrow}{=}$' for verdade.

Se a igualdade '$\overset{\Downarrow}{=}$' for falsa vamos dizer que:
"$f(x)$ não é integrável no intervalo $[a, b]$",
"$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ não está definida", ou
"$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ dá erro".

(Compare com $\frac{42}{0}$...)

## Outra função não integrável

A função de Dirichlet não é integrável porque ela é "muito descontínua".
Um outro exemplo de função não integrável é:

$$g(x) = \begin{cases} x^{-2} & \text{quando } x \neq 0, \\ 0 & \text{quando } x = 0. \end{cases}$$

**Exercício 17.**
a) Calcule $g(2)$, $g(1)$, $g(\frac{1}{2})$, $g(\frac{1}{10})$,
$g(-2)$, $g(-1)$, $g(-\frac{1}{2})$, $g(-\frac{1}{10})$, $g(0)$.
b) Calcule $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} g(x)$.
c) Calcule $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ e $\lim_{x\to -\infty} g(x)$.
d) Faça o gráfico da $g(x)$.

**Exercício 17 (cont.)**
Seja $[a,b]=[-2,2]$.

e) Represente graficamente $\overline{\int}_{P_k} g(x)\,dx$ e $\underline{\int}_{P_k} g(x)\,dx$ para $k=0$, $k=1$ e $k=2$.

f) Convença-se de que $\overline{\int}_{P_k} g(x)\,dx=+\infty$ para todo $k$ e de que $\underline{\int}_{P_k} g(x)\,dx \geq 0$ para todo $k$.

Quando nós aprendermos o Teorema Fundamental do Cálculo (p.12 das notas do Pierluigi!) nós vamos ver que se aplicarmos ele a esta $g(x)$ obtemos um resultado que não faz sentido:

$$\int_{x=-1}^{x=1} g(x)\,dx=-2$$

(Tudo a partir desta página é do material de 2020.1 e vai ser totalmente reescrito!)

**Exercício 1.**

Leia a definição de integral definida do Martins/Martins e tente entendê-la. Dica: ela é ambígua e muito incompleta! A definição deles, na p.203, é esta:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x)\Delta x_i$$

por exemplo, o Martins/Martins dá uma definição bem incompleta de integral na p.203 dele, e diz "para detalhes consulte o livro do Leithold"...

Martins/Martins: “Elementos de cálculo diferencial e integral”
http://angg.twu.net/2020.2-C2/martins_martins__cap_1.pdf

**Exercício 1.**
Sejam $g(x) = 5 - x$ e $P = \{1, 2, 4\}$.
Considere a expressão abaixo:

$$\sum_{i=1}^{N} g(b_i)(b_i - a_i) \le \int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx \le \sum_{i=1}^{N} g(a_i)(b_i - a_i) \qquad (*)$$

a) Represente graficamente o primeiro somatório e calcule-o.
b) Represente graficamente o segundo somatório e calcule-o.
c) Represente graficamente a integral $\int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx$ como a área sob a curva $y = g(x)$ entre $x = 1$ e $x = 4$ e calcule-a – lembre que vimos no final da aula passada como calcular áreas de trapézios.
d) Verifique que os dois '$\le$'s em $(*)$ são verdade.
e) Represente os dois somatórios e a integral num gráfico só.

**Exercício 1 (continuação).**

f) O primeiro somatório está todo abaixo da curva $y = g(x)$? A curva $y = g(x)$ está toda abaixo do segundo somatório? Se “sim” e “sim” represente os dois somatórios e a integral num gráfico só fazendo uma figura parecida com a do slide 2, inclusive usando cores diferentes para a área sob a aproximação por baixo (o somatório da esquerda) e a aproximação por cima (o somatório da direita).

Nos próximos exercícios nós vamos encontrar modos de fazer aproximações por retângulos "por cima" e "por baixo". As nossas primeiras tentativas vão ser meio bugadas e vai ser preciso consertá-las.

Lembre que na aula passada nós vimos como visualizar vários somatórios diferentes, e os que apareceram no exercício 1 correspondem à "soma à direita" e a "soma à esquerda" desta página da Wikipedia:

https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann

**Algumas abreviações**

$$\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}] & = & \sum_{i=1}^N f(a_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{R}] & = & \sum_{i=1}^N f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{Trap}] & = & \sum_{i=1}^N \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[\mathrm{M}] & = & \sum_{i=1}^N f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\mathrm{min}] & = & \sum_{i=1}^N \mathrm{min}(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{max}] & = & \sum_{i=1}^N \mathrm{max}(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i)
\end{array}$$

Obs: todos os "métodos" acima, [L], [R], [Trap], [M], [min], e [max], aparecem na página da Wikipedia, mas com outros nomes e usando partições em que todos os subintervalos têm o mesmo comprimento!

**Exercício 2.** Seja $f$ a nossa função preferida (a da aula passada!) e $P$ a partição $P = \{1, 1.5, 2, 3, 4\}$.

a) Represente em um gráfico só a função $f$ e [M].

b) Represente em um gráfico só a função $f$ e [min].

c) Represente em um gráfico só a função $f$ e [max].

**Exercício 3.** Faça um gráfico como o do item (f) do exercício 1 para

$$[\text{min}] \leq \int_{x=1}^{x=4} f(x)\,dx \leq [\text{max}].$$

**Exercício 4.** Faça um gráfico como o do exercício anterior, mas agora usando $P = \{1, 1.5, 3, 4\}$. Desta vez um trecho do gráfico de $y = f(x)$ vai ficar acima do [max]!!!

**A imagem de um conjunto por uma função**

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{1, 1.5, 2, 3\} \\ B & = & \{\,(x, f(x)) \mid x \in A\,\} \\ & = & \{(1, f(1)), (1.5, f(1.5)), (2, f(2)), (3, f(3))\} \\ C & = & \{\,f(x) \mid x \in A\,\} \\ & = & \{f(1), f(1.5), f(2), f(3)\} \end{array}$$

Dá pra desenhar todos esses conjuntos num gráfico só bem rápido.

Instruções: desenhe o gráfico de $y = f(x)$; represente $A$ no eixo $x$; desenhe $B$ em $\mathbb{R}^2$ "levantando os pontos de $A$ para a curva de $y = f(x)$"; represente $C$ no eixo $y$ "projetando os pontos de $B$ no eixo $y$".

**Exercício 5.** Faça esse gráfico.

**Exercício 6.** Faça a mesma coisa, mas com $A = [1, 3.5]$, que é um conjunto infinito... agora o conjunto $C$ vai ser um intervalo. Qual?

**Um abuso de linguagem**

A nossa função $f$ preferida é

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 4-(x-2)^2 \end{array}$$

O domínio dela é $\mathbb{R}$, e isso quer dizer que se ela receber qualquer argumento que não é um elemento de $\mathbb{R}$ ela deve dar erro...

Existe um truque tradicional que nos permite escrever a imagem de um conjunto por uma função de um jeito mais curto. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto,

$$f(A) = \{\, f(a) \mid a \in A \,\}$$

É como se estivéssemos definindo uma função $f$ nova a partir da $f$ original, e as duas tem o mesmo nome mas domínios disjuntos – a original só lida com argumentos que são números reais, e a nova só lida com argumentos que são conjuntos de números.

## Sup

A função sup é uma espécie de generalização do $\mathsf{max}$.

Vamos começar com um exemplo. No exercício 6 você "calculou" – por desenhos e olhômetro – $f([1,3.5])$, e você obteve um intervalo no eixo $y$. Sejam $A = [1,3.5]$ e $C = f(A)$. Seja

$$D = \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall c \in C.\, c \leq y \,\}.$$

**Exercício 7.** É verdade que $4 \in D$?
**Exercício 8.** É verdade que $5 \in D$?
**Exercício 9.** É verdade que $2 \in D$?
**Exercício 10.** É verdade que $+\infty \in D$?
**Exercício 11.** É verdade que $-\infty \in D$?
**Exercício 12.** Represente graficamente o conjunto $D$.
**Exercício 13.** Qual é o menor elemento de $D$?

**Sup (2)**

A definição formal do sup é bem complicada...
Dê uma olhada nesta página da Wikipedia, como curiosidade:

https://pt.wikipedia.org/wiki/Supremo_e_%C3%ADnfimo

Quando $C \subseteq \mathbb{R}$ temos um procedimento pra calcular $\sup(C)$ que é equivalente à definição "oficial" complicadíssima que aparece na Wikipedia. Ele funciona assim: defina

$$D = \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall c \in C.\, c \leq y \,\}.$$

Este conjunto $D$ vai ter duas propriedades importantes:
1) se $d \in D$ então $[d, +\infty) \subseteq D$, e
2) $D$ tem um menor elemento.

O resultado de $\sup(C)$ vai ser o menor elemento de $D$.

**Sup e Inf**

A definição informal abaixo também funciona:
Se $C \subseteq \mathbb{R}$ então $\sup(C)$ é o menor elemento de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ que está "acima" de todos os elementos de $C$.

e, similarmente...

Se $C \subseteq \mathbb{R}$ então $\inf(C)$ é o maior elemento de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ que está "abaixo" de todos os elementos de $C$.

**Exercício 14.** Calcule:
a) $\sup(\{2,3,4\})$ e $\inf(\{2,3,4\})$
b) $\sup([2,4])$ e $\inf([2,4])$
c) $\sup((2,4))$ e $\inf((2,4))$
d) $\sup(\mathbb{R})$ e $\inf(\mathbb{R})$
e) $\sup(\emptyset)$ e $\inf(\emptyset)$

**Algumas abreviações (2)**

$$\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{R}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{Trap}] & = & \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[\mathrm{M}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\mathrm{min}] & = & \sum_{i=1}^{N} \mathrm{min}(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{max}] & = & \sum_{i=1}^{N} \mathrm{max}(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
\\
[\mathrm{inf}] & = & \sum_{i=1}^{N} \inf(f([a_i, b_i])(b_i - a_i) \\
[\mathrm{sup}] & = & \sum_{i=1}^{N} \sup(f([a_i, b_i])(b_i - a_i)
\end{array}$$

Os métodos [inf] e [sup] são novos...

Eles correspondem ao que a página da Wikipedia chama de “Soma de Riemann Inferior” e “Soma de Riemann Superior”.

## Uma versão “consertada” do exercício 4

**Exercício 15.** Seja $P = \{1, 1.5, 3, 4\}$. Faça um gráfico como o do item (f) do exercício 1 para

$$[\mathrm{inf}] \le \int_{x=1}^{x=4} f(x)\,dx \le [\mathrm{sup}].$$

e verifique que agora a curva $y = f(x)$ está entre [inf] e [sup].