Cálculo 2 - 2020.2

Aula nn: substituição trigonométrica

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

No final destes slides aqui

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-int-subst.pdf#page=19

nós começamos a ver como fazer certas "substituições trigonométricas"...

E nós vimos que:

$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds = \int (\cos\theta)^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

Exercício 1.
Generalize a igualdade dos slides passados.
Mais precisamente: digamos que $s = \operatorname{sen}\theta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.
Encontre fórmulas para γ e δ em

$$\int s^\alpha (\sqrt{1-s^2})^\beta \, ds = \int (\cos\theta)^\gamma (\operatorname{sen}\theta)^\delta \, d\theta$$

que façam esta igualdade ser verdadeira $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z})$.

Exercício 2.
Faça o mesmo para:

$$\int t^\alpha (\sqrt{1+t^2})^\beta \, dt = \int (\cos\theta)^\gamma (\operatorname{sen}\theta)^\delta \, d\theta$$

Aqui a substituição é $t = \tan\theta$
(e os detalhes são mais difíceis)...

Exercício 3.

Usando o que você aprendeu no exercício 1,
ajuste α e β aqui para que isto seja verdade:

$$\int s^{\alpha}(\sqrt{1-s^2})^{\beta}\,ds = \int (\cos\theta)^0(\operatorname{sen}\theta)^0\,d\theta$$

Exercício 4.
Expanda esta série de igualdades aqui —
usando os valores adequados para α e β, óbvio —
pra obter uma série de igualdades que seja convincente pra alguém que tem pouca prática com integração por substituição:

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\int s^\alpha(\sqrt{1-s^2})^\beta \, ds & = & \displaystyle\int (\cos\theta)^0 (\operatorname{sen}\theta)^0 \, d\theta & \qquad (s = \operatorname{sen}\theta) \\
& = & \displaystyle\int 1 \, d\theta & \\
& = & \theta & \\
& = & \operatorname{arcsen} s &
\end{array}$$

Exercício 5.

A maioria dos livros de Cálculo têm uma "tabela de derivadas" e uma "tabela de integrais"... as do próximo slide são do APEX Calculus. Um jeito de usar as fórmulas dessas tabelas é dar nomes pra elas e usar o '[:=]'. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
[\mathsf{ApexDiff12}] &= \left(\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}\right) \\
[\mathsf{ApexDiff12}][a := 99] &= \left(\frac{d}{dx}\log_{99} x = \frac{1}{\ln 99}\cdot\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Encontre uma fórmula da tabela de derivadas do APEX Calculus e uma da tabela de integrais dele que se parecem com o que você descobriu no exercício 4.

Nós vamos aprender como demonstrar muitas fórmulas dessas tabelas.

Differentiation Rules

1. $\frac{d}{dx}(cx) = c$
2. $\frac{d}{dx}(u \pm v) = u' \pm v'$
3. $\frac{d}{dx}(u \cdot v) = uv' + u'v$
4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu' - uv'}{v^2}$
5. $\frac{d}{dx}(u(v)) = u'(v)v'$
6. $\frac{d}{dx}(c) = 0$
7. $\frac{d}{dx}(x) = 1$
8. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
9. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
10. $\frac{d}{dx}(a^x) = \ln a \cdot a^x$
11. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$
12. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$
13. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
14. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
15. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$
16. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
17. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
18. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
19. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
20. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
21. $\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
22. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
23. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$
24. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$
25. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$
26. $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$
27. $\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$
28. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$
29. $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$
30. $\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$
31. $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
32. $\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
33. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$
34. $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$
35. $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$
36. $\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$

Integration Rules

1. $\int c \cdot f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$
2. $\int f(x) \pm g(x)\,dx =$

   $\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
3. $\int 0\,dx = C$
4. $\int 1\,dx = x + C$
5. $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ n \neq -1$
6. $\int e^x\,dx = e^x + C$
7. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$
8. $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$
9. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
10. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
11. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
12. $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$
13. $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
14. $\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$
15. $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$
16. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
17. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
18. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
19. $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$
20. $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$
21. $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$
22. $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
23. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
24. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{|x|}{a}\right) + C$
25. $\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$
26. $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$
27. $\int \tanh x\,dx = \ln(\cosh x) + C$
28. $\int \coth x\,dx = \ln|\sinh x| + C$
29. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$
30. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C$
31. $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$
32. $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right) + C$
33. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right| + C$

Derivada da função inversa

Antes de continuar vamos rever uma fórmula que vocês devem ter visto bem superficialmente em Cálculo 1: a fórmula para a derivada da função inversa. A demonstração dela é esta aqui:

$$[\mathsf{DIFD}] = \left(\begin{array}{l} \text{Se } f(g(x)) = x \text{ então:} \\ \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x = 1 \\ \qquad \| \\ f'(g(x))g'(x) \\ \\ \text{Portanto:} \\ g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)$$

Derivada da função inversa (2)

Um exemplo:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Se } f(g(x)) = x \text{ então:} \\ \\ \frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{d}{dx}x = 1 \\ \qquad \| \\ f'(g(x))g'(x) \\ \\ \text{Portanto:} \\ g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))} \end{array}\right) \begin{bmatrix} f(u) := e^u \\ f'(u) := e^u \\ g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \text{Se } e^{\ln x} = x \text{ então:} \\ \\ \frac{d}{dx}e^{\ln x} = \frac{d}{dx}x = 1 \\ \qquad \| \\ e^{\ln x}\ln' x \\ \\ \text{Portanto:} \\ \ln' x = \dfrac{1}{e^{\ln x}} \end{array}\right)$$

Neste caso a hipótese do teorema da DFI é verdadeira, então $\ln' x = \frac{1}{e^{\ln x}}$, e portanto $\ln' x = \frac{1}{x}$.

Exercício 6.

Calcule o resultado desta substituição:

$$[\mathsf{DFID}]\begin{bmatrix} f(u) := \operatorname{sen} u \\ f'(u) := \cos u \\ g(x) := \operatorname{arcsen} s \\ g'(x) := \operatorname{arcsen}' s \end{bmatrix}$$

Exercício 7.

Dê um nome para a igualdade que você acabou de obter. Lembre que você pode usar nomes péssimos e/ou nada a ver, como [Drácula], [agshTg7s], [Aliás], [Não], etc.

Exercício 8.

Dá pra usar identidades trigonométricas pra transformar o que você obteve nos exercícios 6 e 7 numa demonstração do [ApexDiff19]. Tente descobrir como.

Um modo de fazer o exercício 8

Eu pus uma solução escrita à mão no próximo slide.

Alguns comentários:

Num primeiro momento nós sabemos qual é a fórmula [ApexDiff19], mas ainda não sabemos como demonstrá-la; eu usei vários comentários em português pra deixar isso claro pro leitor. Além disso a maioria das demonstrações em Cálculo 2 são feitas por séries de igualdades em que o leitor deve conseguir entender porque cada uma daquelas igualdades é verdade, e em algumas das igualdades eu pus um comentário à direita pra ajudar o leitor a entendê-la.

A minha demonstração *poderia* dizer algo como

$$\text{Portanto} \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

no final, mas eu omiti isso. Como o "$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x$" aparece no início da série de igualdades e o "$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$" aparece no final dela eu considerei que esse "Portanto $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$" era óbvio.

NA TABELA DE DERIVADAS DO APEX CALCULUS A FÓRMULA 19 É:

$$19.\quad \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

VAMOS ESCREVÊ-LA COMO:

$$[\text{ApexDiff19}] := \left(\operatorname{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

VAMOS TENTAR PROVÁ-LA.

NOS EXERCÍCIOS 6 E 7 NÓS PROVAMOS:

$$[\text{TRIGO}] := \left(\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)}\right),$$

ENTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x &= \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)} && (\text{POR } [\text{TRIGO}]) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(\cos(\operatorname{arcsen} x))^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x))^2}} && (\text{POR } (\cos\alpha)^2 = 1-(\operatorname{sen}\alpha)^2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && (\text{POR } \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x)
\end{aligned}$$

Exercício 9.
Comece a organizar as coisas que você já conseguiu demonstrar numa tabela como as tabelas de derivadas e integrais do APEX calculus, mas em que cada item é da forma

$$[\mathsf{Nome}] \quad = \quad (\mathsf{expr}_1 = \mathsf{expr}_2)$$

A sua tabela de fórmulas não precisa ter as demonstrações, mas 1) você deve saber demonstrar cada fórmula dela se precisar, e 2) cada demonstração só pode depender fórmulas que aparecem antes na tabela.

Obs: este exercício é "permanente", no sentido de que você vai continuar a acrescentar mais fórmulas na sua tabela à medida que você aprender a demonstrá-las.