Cálculo 2 - 2020.2

Todos os PDFs do semestre
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

Cálculo 2 - 2020.2

Aula 1: Introdução ao curso (e a EDOs e ao [:=])

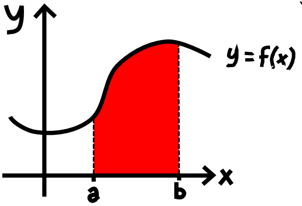
Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

1 Introdução ao curso

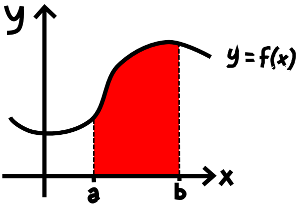
O curso de Cálculo 2 é principalmente sobre dois assuntos: **integrais**, e **equações diferenciais ordinárias**. Nós vamos abreviar "equação diferencial ordinária" como "EDO"; existem também as *equações diferenciais parciais*, ou EDPs, que são um assunto beeem mais complicado.

Integrais são áreas. A expressão $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ quer dizer "a área sob a curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$". Mais visualmente,

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \text{Área}\left(\quad \right)$$



$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \text{Área}$$



Pra aprender a calcular essas áreas a gente vai ter que aprender a aproximá-las por somas de retângulos – um limite complicado! – e os detalhes vão dar um trabalhão... =(

Repare, a área em vermelho é delimitada:

por cima pela curva $y = f(x)$,

pela esquerda pela reta $x = a$,

pela direita pela reta $x = b$,

por baixo pela reta $y = 0$.

Equações diferenciais (lembre: "ordinárias" → "EDOs") são um pouco mais complicadas do que as equações que já sabemos resolver...

1)	$x + 2 = 5$	Equação de 1º grau
2)	$x^2 + 3 = 7$	Eq. de 2º grau simples
3)	$x^2 + x = 6$	Eq. de 2º grau mais complicada
4)	$f'(x) = x^4$	EDO simples
	ou: $\frac{d}{dx}f(x) = x^4$	f é a váriavel/incógnita!!!
5)	$f'(x) = 2f(x)$	EDO mais complicada
6)	$f''(x) + f'(x) = 6f(x)$	idem
7)	$f'(x) = -1/f(x)$	idem
8)	$f'(x) = -x/f(x)$	idem

Na passagem de (1) para (2) e (3) as equações ficaram mais complicadas porque o x passou a poder aparecer elevado ao quadrado.

No (4) estamos procurando uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que obedeça $f'(x) = x^4$ para todo x. Esse "para todo x" fica implícito.

2 Chutar e testar

Nosso primeiro método de resolver equações vai ser chutar e testar – nós vamos chutar valores pra incógnita e ver se algum deles é uma solução.

Aprender a testar vai ser A coisa mais importante do curso.

Neste curso nós vamos usar duas coisas que não são padrão em cursos de Cálculo 2:

1) Uma notação — que normalmente só o pessoal de Computação aprende, e só em cursos avançados... — para substituição de variáveis em expressões arbitrárias,

2) Nós vamos usar a fórmula $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ a beça.

Nós vamos reescrever isto:

Se substituirmos x por $10a+b$
e y por $3c+4d$ em:

$$x^y + 2x$$

obtemos:

$$(10a+b)^{3c+4d} + 2(10a+b)$$

deste jeito:

$$(x^y + 2x)\begin{bmatrix} x := 10a+b \\ y := 3c+4d \end{bmatrix} = (10a+b)^{3c+4d} + 2(10a+b)$$

Repare: em

$$(x^y + 2x)\begin{bmatrix} x := 10a + b \\ y := 3c + 4d \end{bmatrix}$$

$$= (10a + b)^{3c+4d} + 2(10a + b)$$

a notação é

$$\text{(expressão original)[substituições]} = \text{(expressão nova)}$$

e cada uma das substituições é da forma:

$$\text{variável} := \text{expressão}$$

A notação '[:=]' vai ser bem prática pra gente fazer hipóteses e testá-las. Por exemplo, digamos que queremos testar se 2 e 3 são soluções da equação $x + 2 = 5$...

$$\begin{array}{rcl}
(x+2=5)[x:=2] & = & (2+2=5) \\
 & = & (4=5) \\
 & = & \mathbf{F} \\
(x+2=5)[x:=3] & = & (3+2=5) \\
 & = & (5=5) \\
 & = & \mathbf{V}
\end{array}$$

Note que os '='s das expressões entre parênteses são comparações – como a operação '`==`' do `C` – e retornam ou **V** ("Verdadeiro") ou **F** ("Falso").

“Eu só vou corrigir os sinais de igual”

Uma dos slogans que eu mais vou repetir quando estiver tirando dúvidas ou corrigindo exercícios de vocês é “Eu só vou corrigir os sinais de igual”.

Em Cálculo 1 muita gente se enrola com a fórmula da regra da cadeia – porque se enrola na hora de substituir os ‘f’s, ‘g’s, ‘f'’s e ‘g'’s nela... uma das fórmulas mais importantes, e mais difíceis de acreditar, de Cálculo 2 é a da Integração por Substituição, que é BEEEEM pior do que a Regra da Cadeia. O operador de substituição, “[:=], que não tem nada a ver com a Integração por Substituição, vai nos ajudar bastante a aplicar essas fórmulas passo a passo sem a gente se perder.

Vamos precisar de alguns truques novos...

Exemplo: regra da cadeia

Primeiro vou inventar uma abreviação para a regra da cadeia.

Obs: vários dos truques que vamos usar agora são inspirados em notações de Teoria da Computação e não são padrão!!! Não use eles em outros cursos!!! **Os professores podem não entender e podem ficar putos!!!**

O ':=' abaixo é uma atribuição, como o '`=`' do `C`. A linha abaixo quer dizer: "a partir de agora o valor de $[RC]$ vai ser a expressão entre os parênteses grandes.

$$[RC] \quad := \quad \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Exemplo: regra da cadeia (2)
Continuando...

$$[RC] \quad := \quad \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Então:

$$\begin{array}{rcl}
[RC]\left[f := \mathrm{sen}\right] & = & \left(\frac{d}{dx}\mathrm{sen}(g(x)) = \mathrm{sen}'(g(x))g'(x)\right) \\
[RC]\left[f(u) := \mathrm{sen}\, u\right] & = & \left(\frac{d}{dx}\mathrm{sen}(g(x)) = \mathrm{sen}'(g(x))g'(x)\right) \\
[RC]\begin{bmatrix} f(u) := u^4 \\ f'(u) := 4u^3 \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}(g(x))^4 = 4(g(x))^3 g'(x)\right)
\end{array}$$

Repare que agora estamos substituindo o 'f' como se ele fosse uma variável – mas precisamos de gambiarras novas. No caso do meio escrevemos $f(u) := \mathrm{sen}\, u$ ao invés de $f := \mathrm{sen}$, e...

$$[RC] \quad := \quad \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

$$\begin{array}{rcl}
[RC]\left[f := \operatorname{sen}\right] & = & \left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(g(x)) = \operatorname{sen}'(g(x))g'(x)\right) \\
[RC]\left[f(u) := \operatorname{sen} u\right] & = & \left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(g(x)) = \operatorname{sen}'(g(x))g'(x)\right) \\
[RC]\begin{bmatrix} f(u) := u^4 \\ f'(u) := 4u^3 \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}(g(x))^4 = 4(g(x))^3 g'(x)\right)
\end{array}$$

...e no caso de baixo acrescentamos uma linha "$f'(u) := 4u^3$" na lista de substituições. Essa linha é uma consequencia da linha "$f(u) := u^4$", e ela está lá só pra ajudar a gente a se enrolar menos.

Exercício

Tente resolver as EDOs abaixo (de um dos primeiros slides) por chutar e testar.

$$\begin{array}{lll}
4) & f'(x) = x^4 & \text{EDO simples} \\
 & \text{ou: } \frac{d}{dx} f(x) = x^4 & f \text{ é a váriavel/incógnita!!!} \\
5) & f'(x) = 2f(x) & \text{EDO mais complicada} \\
6) & f''(x) + f'(x) = 6f(x) & \text{idem} \\
7) & f'(x) = -1/f(x) & \text{idem} \\
8) & f'(x) = -x/f(x) & \text{idem}
\end{array}$$

Sugestão: comece testando $f(x) = x^3$, $f(x) = x^5$, $f(x) = 200x^5 + 42$, $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{42x}$, $f(x) = e^{2x}$, $f(x) = e^{3x}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Algumas traduções

Cálculo 2 - 2020.2

Aula 2: integrais como somas de retângulos (1)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

Pra que a gente vai usar integrais e EDOs?

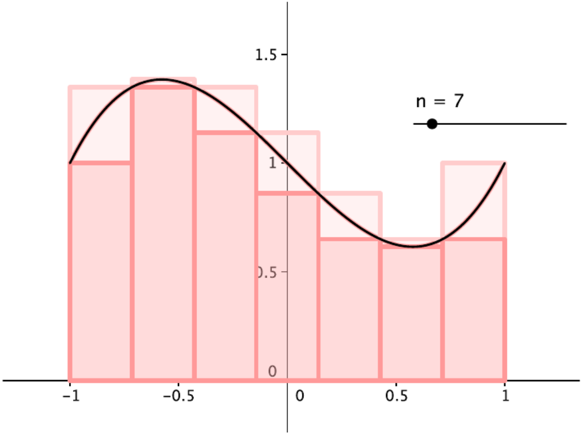
Pra ser bem honesto:

1. Pra passar em Cálculo 2
2. Em umas poucas matérias depois
3. Em quase nada depois que a gente crescer

MAAAAAS pra aprender a integrar e resolver EDOs nós vamos precisar aprender várias coisas que a gente vai usar zilhões de vezes depois do curso... e o que a gente vai ver hoje, que é *como interpretar certos somatórios como áreas e como visualizar essas áreas*, vai ser incrivelmente útil depois.

Algumas figuras

Dê uma olhada nas notas de aula da Cristiane Hernández, linkadas na página do curso... por exemplo,



Nossa função preferida
Seja $f(x) = 4 - (x-2)^2$.
Isto é uma parábola com a concavidade pra baixo.
Verifique que:
$f(0) = 4 - 4 = 0$,
$f(1) = 4 - 1 = 3$,
$f(2) = 4 - 0 = 4$,
$f(3) = 4 - 1 = 3$,
$f(4) = 4 - 4 = 0$.

Além disso $f'(x) = -2(x-2)$, $f'(1) = 2$, $f'(3) = -2$, e
a reta tangente à curva $y = f(x)$ em $x = 1$ tem coef. angular 2, e
a reta tangente à curva $y = f(x)$ em $x = 3$ tem coef. angular -2.

Exercício 1: use estas informações para traçar o gráfico de $f(x)$ entre $x = 0$ e $x = 4$.

Dois jeitos de visualizar $(x, f(x))$
Jeito burro:
Em $x = 2.5$ temos
$f(2.5) = 4 - (2.5 - 2)^2 = 4 - 0.5^2 = 4 - 0.25 = 3.75$.
Encontre o ponto $y = 3.75$ no eixo y.
Desenhe o ponto $(2.5, 3.75)$.

Jeito esperto/rápido:
Encontre no eixo x o ponto $x = 2.5$.
Suba esse ponto pra curva $y = f(x)$ –
você encontrou o ponto $(2.5, f(2.5))$!

Mais exercícios

Exercício 2. Desenhe o gráfico da nossa função preferida
(obs: sempre no intervalo entre $x = 0$ e $x = 4$!)
e desenhe sobre ele o retângulo "cuja área é $f(0.5) \cdot (1.5 - 0.5)$".
Truque: isto é altura · base, e a base vai de $x = 0.5$ a $x = 1.5$.

Exercício 3. Desenhe em outro gráfico
a nossa função preferida e sobre ela os retângulos da soma abaixo:
$f(0.5) \cdot (1.5 - 0.5) + f(1.5) \cdot (2 - 1.5) + f(2) \cdot (3 - 2) + f(3.5)(3.5 - 3)$

Partições

Informalmente uma partição de um intervalo $[a, b]$ é um modo de decompor $[a, b]$ em intervalos menores consecutivos. Por exemplo,

$$[2, 7] = [2, 3.5] \cup [3.5, 4] \cup [4, 6] \cup [6, 7]$$

A definição "certa" é mais complicada... vamos vê-la daqui a pouco.
Caso geral:

$$[a, b] = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \ldots \cup [a_N, b_N],$$

onde:
N é o número de intervalos,
$a = a_1$, $b = b_N$, ("extremidades")
$a_i < b_i$ para todo i em que isto faz sentido $(i = 1, \ldots, N)$
$b_i = a_{i+1}$ para todo i e.q.i.f.s.; neste caso, $i = 1, \ldots, N - 1$

Partições (2)

Um jeito prático de definir uma partição é usando uma tabela.
Por exemplo, esta tabela

i	a_i	b_i
1	2	3.5
2	3.5	4
3	4	6
4	6	7

corresponde à partição de $[2,7]$ do slide anterior.

Exercício 4. Converta esta "partição"

$$[4,12] = [4,5] \cup [5,6] \cup [6,9] \cup [9,10] \cup [10,12]$$

numa tabela. Neste caso quem são a, b e N?

Partições (3)
A definição certa de partição é a seguinte.
Digamos que P seja um subconjunto não-vazio e finito de $\mathbb{R}$,
e que o menor elemento de P seja a e o maior seja b.
Então P é uma partição do intervalo $[a, b]$.

Exemplo: a partição $P = \{2, 3.5, 4, 6, 7\}$ corresponde a:

$$[2, 7] = [2, 3.5] \cup [3.5, 4] \cup [4, 6] \cup [6, 7]$$

Pra fazer a tradução ponha os elementos de P em ordem e chame-os de $b_0, \ldots, b_N$; defina cada a_i como sendo b_{i-1} – por exemplo, $a_1 = b_0$ – e encontre a, b, e N.

Exercício 5. Converta a partição $P = \{2.5, 3, 4, 6, 10\}$ para o formato tabela e para o formato $[a, b] = [a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_N, b_N]$.

Partições definem muitas coisas implicitamente

Quando dizemos algo como "Seja P a partição $\{2.5, 4, 6\}$" estamos criando um contexto no qual há uma partição "default" definida... e neste contexto vamos ter valores definidos para N, a, b, e para cada a_i e b_i. Por exemplo...

Seja P a partição $\{2.5, 4, 6\}$. Então

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{N} f(b_i) \cdot (b_i - a_i) & = & \sum_{i=1}^{2} f(b_i) \cdot (b_i - a_i) \\ & = & f(b_1) \cdot (b_1 - a_1) + f(b_2) \cdot (b_2 - a_2) \\ & = & f(4) \cdot (4 - 2.5) + f(6) \cdot (6 - 4) \end{array}$$

Note que a expressão $\sum_{i=a}^{b} \mathsf{expr}$ quer dizer "some várias cópias da expressão expr, a primeira com i substituido por a, a segunda com i substituido por $a+1$, etc etc, até a cópia com i substituido por b"...

Se você tiver dificuldade pra interpretar alguma expressão com somatórios você pode calculá-la beeem passo a passo usando a operação '[:=]' da aula passada. Por exemplo:

$$
\begin{array}{rcl}
\sum_{i=4}^{7} f(b_i)\cdot(b_i-a_i) & = & (f(b_i)\cdot(b_i-a_i))[i:=4] \\
& + & (f(b_i)\cdot(b_i-a_i))[i:=5] \\
& + & (f(b_i)\cdot(b_i-a_i))[i:=6] \\
& + & (f(b_i)\cdot(b_i-a_i))[i:=7] \\
& = & f(b_4)\cdot(b_4-a_4) \\
& + & f(b_5)\cdot(b_5-a_5) \\
& + & f(b_6)\cdot(b_6-a_6) \\
& + & f(b_7)\cdot(b_7-a_7) \\
& = & \ldots
\end{array}
$$

Alguns exercícios de visualizar somas de retângulos...

Exercício 6. Seja f a nossa função preferida e seja P a partição $\{0.5, 1, 2, 2.5\}$. Represente num gráfico só a curva $y = f(x)$ e os retângulos da soma $\sum_{i=1}^{N} f(b_i) \cdot (b_i - a_i)$.

Exercício 7. Seja f a nossa função preferida e seja P a mesma partição que no exercício anterior. Represente num gráfico só – separado do gráfico do exercício anterior!!! – a curva $y = f(x)$ e os retângulos da soma $\sum_{i=1}^{N} f(a_i) \cdot (b_i - a_i)$.

Exercício 8. Usando a mesma função f e a mesma partição P dos exercícios anteriores, represente num outro gráfico a curva $y = f(x)$ e os retângulos da soma $\sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2}) \cdot (b_i - a_i)$. Repare que $\frac{a_i+b_i}{2}$ é o ponto médio do intervalo $[a_i, b_i]$, e é fácil encontrar pontos médios no olhômetro.

Agora comparando com a Wikipedia

Exercício 9. Dê uma olhada na página

https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann

da Wikipedia. Vamos tentar entender alguns pedaços dela.

Seja P a "partição do intervalo $[0,3]$ em 6 subintervalos iguais". Tem um ponto em que a página da Wikipedia diz: "os pontos da partição serão..." – entenda as definições dela, descubra quem é Δx neste caso, e escreva quais são os pontos desta partição na linguagem da página da Wikipedia e na linguagem que eu usei nos slides.

Expanda a fórmula da página da Wikipedia para a "soma média" neste caso. Expanda também a nossa fórmula $\sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2}) \cdot (b_i - a_i)$ e compare as duas expansões.

(Vamos ver o que são "ínfimos" e "supremos" na aula que vem)

Trapézios
Tem dois modos diferentes da gente interpretar geometricamente $\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$:

1) como um retângulo de altura $\frac{f(a)+f(b)}{2}$, ou
2) como um trapézio com vértices

$$(a,0),(b,0),(b,f(b)),(a,f(a))$$

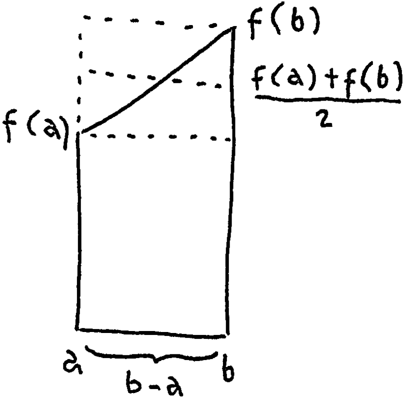
.

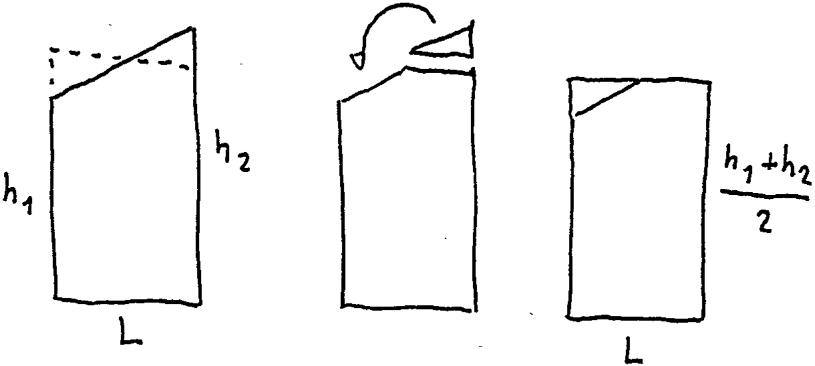
Exercício 10. Sejam f a nossa função preferida e P a partição $\{0,1,2\}$. Desenhe num gráfico só a curva $y=f(x)$ e os trapézios da soma:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i-a_i)$$

(Veja as figuras da "Regra Trapezoidal" na página da Wikipedia)

Umas figuras pra pra quem não lembra de como transformar um trapézio num retângulo com a mesma área que ele por cortar-e-colar...





h1
h2
L
h1+h2
2
L

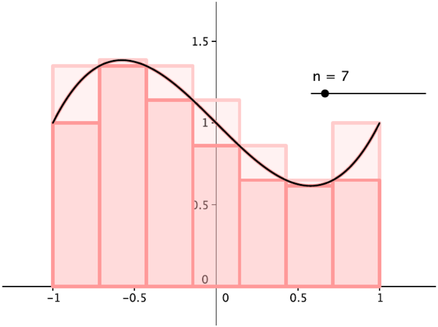
Cálculo 2 - 2020.2

Aula 4: Integrais como somas de retângulos (2)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

Aproximações por cima e por baixo

Uma das figuras na p.2 das notas da Cristiane Hernández é esta:



Ela mostra uma tentativa de calcular uma integral fazendo uma *aproximação por retângulos por baixo* e uma *aproximação por retângulos por cima* para $y = f(x)$ no intervalo entre $x = -1$ e $x = 1$. A curva $y = f(x)$ fica entre estas duas aproximações.

Porque aprender isto

As definições *formais* de “aproximação por retângulos por baixo” e “aproximação por retângulos por cima” são bem trabalhosas. Elas envolvem alguns truques com conjuntos infinitos, “para todo” e “existe”, que a maioria dos livros de Cálculo pula...

Nós vamos ver essas definições em detalhes porque entendê-las e aprender a visualizar cada subexpressão delas vai acabar sendo muito útil pras próximas matérias de Matemática do curso de vocês.

No material da aula 2 eu pedi pra vocês aprenderem a fazer certos desenhos sem contas, chamei isso de o “jeito esperto”, e disse que fazê-los calculando todas as coordenadas era o “jeito burro”. Na discussão desse material pelo Telegram a Eduarda me pediu pra explicar melhor isso, e eu dei essa explicação aqui...

Tenta aprender a não fazer as contas... se você fizer tudo pelas contas você vai demorar muito mais e não vai descobrir um monte de truques importantes que a gente só descobre se a gente tenta aprender a visualizar tudo geometricamente...

Acho que eu tenho um exemplo bom.

Num dos primeiros slides eu usei uma figura copiada das notas da Cristiane Hernandez em que ela usa uma partição com 7 intervalos - ela até escreveu do lado "$n = 7$"...

Daqui a pouco a gente vai ter que usar figuras — que a gente não vai poder desenhar explicitamente com todos os detalhes — com 10 intervalos, ou 100, ou 1000, ou um milhão de intervalos

Se você aprender a visualizar tudo sem contas você vai conseguir visualizar a figura com um milhão de intervalos em poucos segundos.

E se você tiver que fazer as contas pra um milhão de intervalos você vai gastar um tempo que a gente não tem =(

Imagens de conjuntos

Dê uma olhada na seção 1.3 do Martins/Martins.
Nós vamos usar uma notação um pouco diferente da deles.
Se $f : A \to \mathbb{R}$ (obs: $A = \mathsf{dom}(f)$),

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{gr}_f & = & \{\, (x, f(x)) \mid x \in A \,\}, \\ \mathsf{im}_f & = & \{\, f(x) \mid x \in A \,\}, \\ \mathsf{gr}_f(B) & = & \{\, (x, f(x)) \mid x \in B \,\}, \\ F(B) & = & \{\, f(x) \mid x \in B \,\}, \end{array}$$

Por exemplo, se

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

e $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ então:

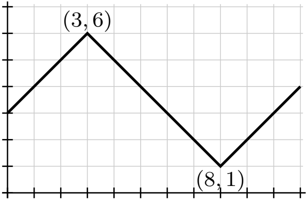
$$\begin{array}{rcl} \mathsf{gr}_f(B) & = & \mathsf{gr}_f(\{-1, 0, 1, 2\}), \\ & = & \{\, (x, f(x)) \mid x \in \{-1, 0, 1, 2\} \,\} \\ & = & \{(-1, f(-1)), (0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2))\} \\ & = & \{(-1, (-1)^2), (0, 0^2), (1, 1^2), (2, 2^2)\} \\ & = & \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\} \\ F(B) & = & \{\, f(x) \mid x \in \{-1, 0, 1, 2\} \,\} \\ & = & \{(-1)^2, 0^2, 1^2, 2^2\} \\ & = & \{1, 0, 1, 4\} \\ & = & \{0, 1, 4\} \end{array}$$

Se visualizarmos B como um subconjunto do eixo x
então $\mathsf{gr}_f(B)$ é o resultado de "levantar" cada ponto de B
para o ponto correspondente no gráfico de f,
e $F(B)$ é o resultado de projetar todos os pontos de $\mathsf{gr}_f(B)$
no eixo y.

Exercício 1.
Sejam $f(x) = x^2$ e $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$.
a) Calcule $F(B)$.
b) Calcule $\mathsf{gr}_f(B)$.
c) Represente graficamente num gráfico só: B "como um subconjunto do eixo x", $\mathsf{gr}_f(B)$, $F(B)$ "como um subconjunto do eixo y".
d) Represente graficamente num (outro) gráfico só: B "como um subconjunto do eixo y", $\mathsf{gr}_f(B)$, $F(B)$ "como um subconjunto do eixo y".

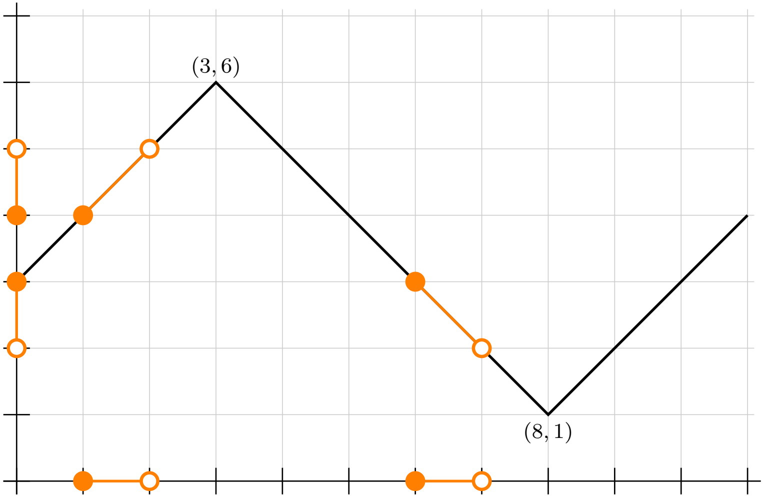
Imagens de intervalos

Seja:

$f(x) =$ 

$$= \begin{cases} x+3 & \text{quando } x \leq 3, \\ 9-x & \text{quando } 3 < x < 8, \\ x-7 & \text{quando } 8 \leq x \end{cases}$$

Se B é um conjunto infinito —
por exemplo, $B = [1,2) \cup [6,7)$ —
não dá pra calcularmos $\mathsf{gr}_f(B)$ e $F(B)$
fazendo as contas pra todos os pontos...
É melhor fazer desenhos.



Neste caso temos
$F([1,2) \cup [6,7)) = (2,3] \cup [4,5)$.

Exercício 2.
Seja f a função definida dois slides atrás.
Calcule:
a) $F([2,3))$
b) $F([2,4))$
c) $F((2,4))$
d) $F((2,9))$
e) $F([1,2) \cup [4,5))$
f) $F([1,2) \cup \{3\} \cup [4,5))$

Exercício 3.

Para cada uma dos proposições abaixo diga se ela é verdadeira ou falsa.

a) $\forall x \in [7,9].\, 1 < f(x)$

b) $\forall x \in [7,9].\, 1 \leq f(x)$

c) $\exists x \in [7,9].\, 1 < f(x)$

d) $\exists x \in [7,9].\, 1 \leq f(x)$

Da mesma forma que podemos definir funções
nós podemos definir proposições.
Uma proposição é uma função que retorna **V** ou **F**.
Seja $P(y) = (\forall x \in [7,9].\, y \leq f(x))$.

Exercício 4.
Para cada uma das proposições abaixo
diga se ela é verdadeira ou falsa.
a) $P(0.5)$
b) $P(0.99)$
c) $P(1)$
d) $P(1.01)$
e) $P(2)$

Exercício 5.
Calcule os dois conjuntos abaixo:
a) $L = \{\, y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in [7,9].\, y \leq f(x) \,\}$
b) $U = \{\, y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in [7,9].\, f(x) \leq y \,\}$
e:
c) Represente o conjunto L no eixo y.
d) Represente o conjunto U no eixo y.
e) Represente o conjunto L usando notação de intervalos — algo como: "$L = [42, 99) \cup \{200\} \cup (420, +\infty)$".
f) Represente o conjunto U usando notação de intervalos.

Exercício 6.
Seja $M(y) = (y \in L \text{ e } \forall y' \in L.\, y' \leq y)$ —
ou, equivalentemente, $M(y) = (y \in L \text{ e } \forall z \in L.\, z \leq y)$.
Para cada uma das proposições abaixo
diga se ela é verdadeira ou falsa.
a) $M(4)$
b) $M(2)$
c) $M(0)$
d) $M(0.5)$
e) $M(1)$

(Obs: este slide é uma versão melhorada do slide do exercício 7!)

Alguns slides atrás nós definimos:

$$\begin{array}{rcl} L & = & \{\, y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in [7,9].\, y \leq f(x) \,\} \\ M(y) & = & (y \in L \text{ e } \forall z \in L.\, z \leq y) \end{array}$$

Agora vamos generalizar o L de dois jeitos:

$$\begin{array}{rcl} L(B) & = & \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall b \in B.\, y \leq f(b) \,\} \\ I(C) & = & \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall c \in C.\, y \leq c \,\} \end{array}$$

Exercício 7':

a) Calcule $L([7,9])$.

b) Verifique que $L([7,9]) = I(F([7,9]))$.

c) $L(B) = I(F(B))$ vai ser verdade pra qualquer conjunto B? Porquê?

(Obs: este slide é uma versão melhorada do slide do exercício 8!)

Agora vamos generalizar o M e definir o inf...

$$\begin{array}{rcl} L(B) & = & \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall b \in B.\, y \leq f(b) \,\} \\ I(C) & = & \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall c \in C.\, y \leq c \,\} \\ M(y, D) & = & (y \in D \text{ e } \forall d \in D.\, d \leq y) \\ y \text{ é o inf de } C & = & (y \in I(C) \text{ e } \forall d \in I(C).\, d \leq y) \end{array}$$

Exercício 8':

a) Calcule $I([2,3])$ e $I((2,3))$.

b) Calcule $M(1, [-\infty, 2])$, $M(2, [-\infty, 2])$, $M(3, [-\infty, 2])$.

c) Calcule o valor de "1 é o inf de {2,3,4}". Deve dar **V** ou **F**.

d) Calcule "2 é o inf de {2,3,4}" e "3 é o inf de {2,3,4}".

e) Calcule $I(\mathbb{R})$.

f) Calcule $I(\emptyset)$.

(Obs: este slide é uma versão melhorada do slide do exercício 9!)

Agora vamos definir o sup:

$$\begin{array}{rcl} U(B) & = & \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall b \in B.\, f(b) \leq y \,\} \\ S(C) & = & \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall c \in C.\, c \leq y \,\} \\ N(y, D) & = & (y \in D \text{ e } \forall d \in D.\, y \leq d) \\ y \text{ é o sup de } C & = & (y \in S(C) \text{ e } \forall d \in S(C).\, y \leq d) \end{array}$$

Exercício 9':

a) Calcule $S([2,3])$ e $S((2,3))$.

b) Calcule $N(2, [3, +\infty])$, $N(3, [3, +\infty])$, $N(4, [3, +\infty])$.

c) Calcule o valor de "5 é o sup de {2,3,4}". Deve dar **V** ou **F**.

d) Calcule "3 é o sup de {2,3,4}" e "4 é o sup de {2,3,4}".

e) Calcule $S(\mathbb{R})$.

f) Calcule $S(\emptyset)$.

Alguns slides atrás nós definimos:

$$\begin{array}{rcl} L & = & \{\, y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in [7,9].\, y \leq f(x) \,\} \\ M(y) & = & (y \in L \text{ e } \forall z \in L.\, z \leq y) \end{array}$$

Agora vamos generalizar isto para:

$$\begin{array}{rcl} L(C) & = & \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall x \in C.\, y \leq f(x) \,\} \\ M(y, C) & = & (y \in L(C) \text{ e } \forall z \in L(C).\, z \leq y) \end{array}$$

Exercício 7.

Calcule:

a) $L((2,3] \cup [4,5))$

b) $M(0,\ (2,3] \cup [4,5))$

c) $M(1,\ (2,3] \cup [4,5))$

d) $M(2,\ (2,3] \cup [4,5))$

e) $M(3,\ (2,3] \cup [4,5))$

E agora vamos definir o "ínfimo" de um conjunto C:

$$\begin{array}{rcl} L(C) & = & \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall x \in C.\, y \le f(x) \,\} \\ M(y, C) & = & (y \in L(C) \text{ e } \forall z \in L(C).\, z \le y) \\ y \text{ é o inf de C} & = & (y \in L(C) \text{ e } \forall z \in L(C).\, z \le y) \end{array}$$

Exercício 8.
Para cada uma das proposições abaixo
diga se ela é verdadeira ou falsa.
a) 1 é o inf de $(2, 3] \cup [4, 5)$
b) 2 é o inf de $(2, 3] \cup [4, 5)$
c) 3 é o inf de $(2, 3] \cup [4, 5)$
d) 0 é o inf de $\mathbb{R}$
e) $-\infty$ é o inf de $\mathbb{R}$
f) $-\infty$ é o inf de $\emptyset$
g) $+\infty$ é o inf de $\emptyset$

Exercício 9.

Vamos definir $L(C)$ da seguinte forma:

$$L(C) = \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} \mid \forall c \in C.\, y \le c \,\}$$

Calcule:
a) $L([2,3])$
b) $L(\{2,3\})$
c) $L([2,3))$
d) $L((2,3))$ (repare que este (2,3) é um intervalo aberto!)
e) $L((-4,-3))$ (idem!)
f) $L(\mathbb{R})$
g) $L(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$
h) $L(\emptyset)$

E agora vamos definir o "supremo" de um conjunto C.
Compare:

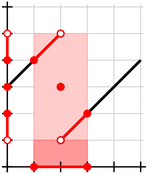
$$\begin{array}{rcl}
L(C) & = & \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall x \in C.\, y \leq f(x) \,\} \\
M(y, C) & = & (y \in L(C) \text{ e } \forall z \in L(C).\, z \leq y) \\
y \text{ é o inf de C} & = & (y \in L(C) \text{ e } \forall z \in L(C).\, z \leq y)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
U(C) & = & \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall x \in C.\, f(x) \leq y \,\} \\
M'(y, C) & = & (y \in U(C) \text{ e } \forall w \in U(C).\, y \leq w) \\
y \text{ é o sup de C} & = & (y \in U(C) \text{ e } \forall w \in U(C).\, y \leq w)
\end{array}$$

Infs e sups vão nos permitir definir o "retângulo mais alto sob a curva $y = f(x)$" e o "retângulo mais baixo sobre a curva $y = f(x)$" de um modo que funciona até quando a f é descontínua...

Veja o "exemplão" da próxima página.

Exemplão: métodos do sup e do inf

Seja $f(x) =$  $= \begin{cases} x+3 & \text{quando } x < 2, \\ 3 & \text{quando } x = 2, \\ x-1 & \text{quando } 2 < x. \end{cases}$

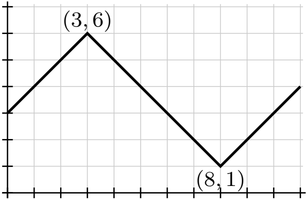
$$\begin{array}{lrcl}
\text{Seja} & B & = & [1,3]. \\
\text{Então} & F(B) & = & (1,2) \cup \{3\} \cup [4,5), \\
& U(F(B)) & = & [5,+\infty], \\
& L(F(B)) & = & [-\infty,1], \\
& \sup(F(B)) & = & 5, \\
& \inf(F(B)) & = & 1,
\end{array}$$

$\sup(F([1,3])) \cdot (3-1)$ é o retângulo mais claro,
$\inf(F([1,3])) \cdot (3-1)$ é o retângulo mais escuro...

Exercício 10.

Seja:

$f(x) =$



$$= \begin{cases} x+3 & \text{quando } x \leq 3, \\ 9-x & \text{quando } 3 < x < 8, \\ x-7 & \text{quando } 8 \leq x \end{cases}$$

Seja $P = \{1, 2, 4, 5, 7, 9, 10\}$.

Represente graficamente:

a) $\sum_{i=1}^{N} \inf(F([a_i, b_i])) \cdot (b_i - a_i)$

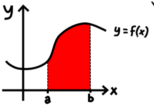
b) $\sum_{i=1}^{N} \sup(F([a_i, b_i])) \cdot (b_i - a_i)$

Dica: represente o (a) e o (b) no mesmo gráfico usando retângulos de cores diferentes, como nas figuras das páginas 2 e 19.

Aproximações por cima e por baixo

Na aula 1 nós vimos esta figura:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \text{Área}\left(\quad \right)$$



As aproximações da integral de f por retângulos por cima e por baixo dependem da escolha de uma partição P do intervalo $[a,b]$. As definições formais são:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\int}_P f(x)\,dx & = & \sum_{i=1}^{N} \sup(F([a_i,b_i])) \cdot (b_i - a_i) \\
\underline{\int}_P f(x)\,dx & = & \sum_{i=1}^{N} \inf(F([a_i,b_i])) \cdot (b_i - a_i)
\end{array}$$

Exercício 11.

Seja $f(x)$ a função do exercício 10.
Seja $P = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$.
Represente graficamente (num gráfico só)

$$f(x), \quad \underline{\int}_P f(x)\,dx, \quad \overline{\int}_P f(x)\,dx.$$

A diferença entre as duas aproximações, $\overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx$,
corresponde à área em rosa claro nos slides 2 e 19.
Ela consiste num certo número de quadrados 1×1.
Quantos?

Exercício 12.

Faça a mesma coisa, mas agora para a partição $P = \{1, 1.5, 2, 2.5, \ldots, 10\}$.

Agora a diferença $\overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx$

é feita de um certo número de quadrados de dimensões 0.5×0.5.

Quantos?

Exercício 13.

Sejam:
$f(x) = 4 - (x-2)^2$,
$P_0 = \{0, 4\}$,
$P_1 = \{0, 2, 4\}$,
$P_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
$P_3 = \{0, 0.5, 1, 1.5, \ldots, 4\}$.

a) Represente graficamente $\overline{\int}_{P_3} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_3} f(x)\,dx$.

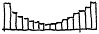
Exercício 13 (cont.)

b) Represente num gráfico só:
$\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$,
$\overline{\int}_{P_0} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_0} f(x)\,dx$,
$\overline{\int}_{P_1} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_1} f(x)\,dx$,
$\overline{\int}_{P_2} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_2} f(x)\,dx$,
$\overline{\int}_{P_3} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_3} f(x)\,dx$.

c) Seja $A = \overline{\int}_{P_3} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_3} f(x)\,dx$, considerado como um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado de retângulos, e B o conjunto obtido a partir de A deslizando cada retângulo de A pra baixo como explicado no vídeo. Desenhe B direito e obtenha uma estimativa para a área de B seguindo as idéias do vídeo.

Exercício 13 (cont.)

d) Faça a mesma coisa que no item c, mas usando a partição P_4. Você deve obter algo desta forma:

$0 \leq \text{Área}($  $) \leq \underline{}$,

onde o "___" é ou um número ou uma expressão fácil de calcular.

e) Faça a mesma coisa que no item d, mas usando a partição P_5.
f) Faça a mesma coisa que no item d, mas usando a partição P_6.

Exercício 14.

Repare que dá pra expressar a partição que divide o intervalo $[a,b]$ em N partes iguais assim:

$$\{a,\ a+1\cdot\frac{b-a}{N},\ a+2\cdot\frac{b-a}{N},\ldots,\ a+N\cdot\frac{b-a}{N}\}$$

a) Teste a fórmula acima para o caso $[a,b]=[2,5]$, $N=6$.
b) Teste a fórmula acima para o caso $[a,b]=[2,5]$, $N=7$.

Dica importante: no Ensino Médio os professores dizem pra sempre fazer "simplificações" como esta aqui: $2+4\cdot\frac{5-2}{7}=\frac{26}{7}$. Em casos como a acima essas "simplificações" fazem com que os padrões fiquem muito mais difíceis de entender. Não seja como aqueles professores do Ensino Médio!

Exercício 14 (cont.)

Se estamos tentando integrar uma função no intervalo $[a,b]$ a nossa sequência preferida de partições para este intervalo vai ser definida por:

$$P_k = \{a,\ a+1\cdot\frac{b-a}{2^k},\ a+2\cdot\frac{b-a}{2^k},\ldots,b\}$$

c) A partição P_0 tem quantos intervalos? E quantos pontos?
d) A partição P_1 tem quantos intervalos? E quantos pontos?
e) A partição P_2 tem quantos intervalos? E quantos pontos?
f) A partição P_5 tem quantos intervalos? E quantos pontos?

Mais definições

Defs:

$$\begin{aligned}\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty} \overline{\int}_{P_k} f(x)\,dx \text{ e} \\ \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty} \underline{\int}_{P_k} f(x)\,dx,\end{aligned}$$

onde $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$ é a nossa sequência preferida de partições para o intervalo $[a, b]$, que definimos no slide anterior.

Exercício 15.

Seja $f(x) = 4 - (x-2)^2$.

a) Represente graficamente $\overline{\int}_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$, representando todas as "$\overline{\int}_{P_k} f(x)\,dx$"s num gráfico só.

b) Represente graficamente $\underline{\int}_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$, representando todas as "$\underline{\int}_{P_k} f(x)\,dx$"s num gráfico só.

As notas do Pierluigi Benevieri

Agora dê uma olhada nestas notas
de Cálculo 2 do Pierluigi Benevieri:

https://www.ime.usp.br/~pluigi/registro-MAT121-15.pdf

Nas páginas 3 e 4 ele define a integral (na definição 3) usando a "família de todas as partições do intervalo $[a, b]$"... isto é beeeem mais difícil de entender e visualizar do que o que eu fiz aqui, usando o limite na minha sequência preferida de partições do intervalo $[a, b]$...

Exercício 16.

a) Entenda a definição da Função de Dirichlet que o Pierluigi faz nas páginas 8 e 9, e que ele chama de $f(x)$ naquele trecho das notas.

b) Faça o gráfico dessa função $f(x)$.

Seja $[a, b] = [2, 5]$.

c) Represente graficamente $\overline{\int}_{P_k} f(x)\,dx$ e $\underline{\int}_{P_k} f(x)\,dx$ para $k = 0$, $k = 1$ e $k = 2$.

d) Convença-se de que

$$\overline{\int}_{x=2}^{x=5} f(x)\,dx = 3 \quad \text{e} \quad \underline{\int}_{x=2}^{x=5} f(x)\,dx = 0.$$

A definição de integral

A nossa definição de $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ vai ser:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \;=\; \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \;\overset{\Downarrow}{=}\; \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

se a igualdade marcada com '$\overset{\Downarrow}{=}$' for verdade.

Se a igualdade '$\overset{\Downarrow}{=}$' for falsa vamos dizer que:
"$f(x)$ não é integrável no intervalo $[a,b]$",
"$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ não está definida", ou
"$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ dá erro".

(Compare com $\frac{42}{0}$...)

Outra função não integrável

A função de Dirichlet não é integrável porque ela é "muito descontínua".
Um outro exemplo de função não integrável é:

$$g(x) = \begin{cases} x^{-2} & \text{quando } x \neq 0, \\ 0 & \text{quando } x = 0. \end{cases}$$

Exercício 17.
a) Calcule $g(2)$, $g(1)$, $g(\frac{1}{2})$, $g(\frac{1}{10})$, $g(-2)$, $g(-1)$, $g(-\frac{1}{2})$, $g(-\frac{1}{10})$, $g(0)$.
b) Calcule $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} g(x)$.
c) Calcule $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ e $\lim_{x\to -\infty} g(x)$.
d) Faça o gráfico da $g(x)$.

Exercício 17 (cont.)
Seja $[a, b] = [-2, 2]$.

e) Represente graficamente $\overline{\int}_{P_k} g(x)\,dx$ e $\underline{\int}_{P_k} g(x)\,dx$ para $k = 0$, $k = 1$ e $k = 2$.

f) Convença-se de que $\overline{\int}_{P_k} g(x)\,dx = +\infty$ para todo k e de que $\underline{\int}_{P_k} g(x)\,dx \geq 0$ para todo k.

Quando nós aprendermos o Teorema Fundamental do Cálculo (p.12 das notas do Pierluigi!) nós vamos ver que se aplicarmos ele a esta $g(x)$ obtemos um resultado que não faz sentido:

$$\int_{x=-1}^{x=1} g(x)\,dx = -2$$

(Tudo a partir desta página é do material de 2020.1 e vai ser totalmente reescrito!)

Exercício 1.

Leia a definição de integral definida do Martins/Martins e tente entendê-la. Dica: ela é ambígua e muito incompleta! A definição deles, na p.203, é esta:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x)\Delta x_i$$

por exemplo, o Martins/Martins dá uma definição bem incompleta de integral na p.203 dele, e diz "para detalhes consulte o livro do Leithold"...

Martins/Martins: “Elementos de cálculo diferencial e integral”
http://angg.twu.net/2020.2-C2/martins_martins__cap_1.pdf

Exercício 1.
Sejam $g(x) = 5 - x$ e $P = \{1, 2, 4\}$.
Considere a expressão abaixo:

$$\sum_{i=1}^{N} g(b_i)(b_i - a_i) \leq \int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{N} g(a_i)(b_i - a_i) \qquad (*)$$

a) Represente graficamente o primeiro somatório e calcule-o.
b) Represente graficamente o segundo somatório e calcule-o.
c) Represente graficamente a integral $\int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx$ como a área sob a curva $y = g(x)$ entre $x = 1$ e $x = 4$ e calcule-a – lembre que vimos no final da aula passada como calcular áreas de trapézios.
d) Verifique que os dois '$\leq$'s em $(*)$ são verdade.
e) Represente os dois somatórios e a integral num gráfico só.

Exercício 1 (continuação).

f) O primeiro somatório está todo abaixo da curva $y = g(x)$? A curva $y = g(x)$ está toda abaixo do segundo somatório? Se "sim" e "sim" represente os dois somatórios e a integral num gráfico só fazendo uma figura parecida com a do slide 2, inclusive usando cores diferentes para a área sob a aproximação por baixo (o somatório da esquerda) e a aproximação por cima (o somatório da direita).

Nos próximos exercícios nós vamos encontrar modos de fazer aproximações por retângulos "por cima" e "por baixo". As nossas primeiras tentativas vão ser meio bugadas e vai ser preciso consertá-las.

Lembre que na aula passada nós vimos como visualizar vários somatórios diferentes, e os que apareceram no exercício 1 correspondem à "soma à direita" e a "soma à esquerda" desta página da Wikipedia:

`https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann`

Algumas abreviações

$$
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{R}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{Trap}] & = & \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[\mathrm{M}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\mathrm{min}] & = & \sum_{i=1}^{N} \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{max}] & = & \sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i)
\end{array}
$$

Obs: todos os "métodos" acima, [L], [R], [Trap], [M], [min], e [max], aparecem na página da Wikipedia, mas com outros nomes e usando partições em que todos os subintervalos têm o mesmo comprimento!

Exercício 2. Seja f a nossa função preferida (a da aula passada!) e P a partição $P = \{1, 1.5, 2, 3, 4\}$.

a) Represente em um gráfico só a função f e [M].

b) Represente em um gráfico só a função f e [min].

c) Represente em um gráfico só a função f e [max].

Exercício 3. Faça um gráfico como o do item (f) do exercício 1 para

$$[\text{min}] \le \int_{x=1}^{x=4} f(x)\,dx \le [\text{max}].$$

Exercício 4. Faça um gráfico como o do exercício anterior, mas agora usando $P = \{1, 1.5, 3, 4\}$. Desta vez um trecho do gráfico de $y = f(x)$ vai ficar acima do [max]!!!

A imagem de um conjunto por uma função

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{1, 1.5, 2, 3\} \\ B & = & \{\, (x, f(x)) \mid x \in A \,\} \\ & = & \{(1, f(1)), (1.5, f(1.5)), (2, f(2)), (3, f(3))\} \\ C & = & \{\, f(x) \mid x \in A \,\} \\ & = & \{f(1), f(1.5), f(2), f(3)\} \end{array}$$

Dá pra desenhar todos esses conjuntos num gráfico só bem rápido.

Instruções: desenhe o gráfico de $y = f(x)$; represente A no eixo x; desenhe B em $\mathbb{R}^2$ "levantando os pontos de A para a curva de $y = f(x)$"; represente C no eixo y "projetando os pontos de B no eixo y".

Exercício 5. Faça esse gráfico.

Exercício 6. Faça a mesma coisa, mas com $A = [1, 3.5]$, que é um conjunto infinito... agora o conjunto C vai ser um intervalo. Qual?

Um abuso de linguagem

A nossa função f preferida é

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 4-(x-2)^2 \end{array}$$

O domínio dela é $\mathbb{R}$, e isso quer dizer que se ela receber qualquer argumento que não é um elemento de $\mathbb{R}$ ela deve dar erro...

Existe um truque tradicional que nos permite escrever a imagem de um conjunto por uma função de um jeito mais curto. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto,

$$f(A) = \{\, f(a) \mid a \in A \,\}$$

É como se estivéssemos definindo uma função f nova a partir da f original, e as duas tem o mesmo nome mas domínios disjuntos – a original só lida com argumentos que são números reais, e a nova só lida com argumentos que são conjuntos de números.

Sup

A função sup é uma espécie de generalização do max.

Vamos começar com um exemplo. No exercício 6 você "calculou" – por desenhos e olhômetro – $f([1, 3.5])$, e você obteve um intervalo no eixo y. Sejam $A = [1, 3.5]$ e $C = f(A)$. Seja

$$D = \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall c \in C.\, c \leq y \,\}.$$

Exercício 7. É verdade que $4 \in D$?
Exercício 8. É verdade que $5 \in D$?
Exercício 9. É verdade que $2 \in D$?
Exercício 10. É verdade que $+\infty \in D$?
Exercício 11. É verdade que $-\infty \in D$?
Exercício 12. Represente graficamente o conjunto D.
Exercício 13. Qual é o menor elemento de D?

Sup (2)

A definição formal do sup é bem complicada...
Dê uma olhada nesta página da Wikipedia, como curiosidade:

`https://pt.wikipedia.org/wiki/Supremo_e_%C3%ADnfimo`

Quando $C \subseteq \mathbb{R}$ temos um procedimento pra calcular $\sup(C)$ que é equivalente à definição "oficial" complicadíssima que aparece na Wikipedia. Ele funciona assim: defina

$$D = \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall c \in C.\, c \leq y \,\}.$$

Este conjunto D vai ter duas propriedades importantes:
1) se $d \in D$ então $[d, +\infty) \subseteq D$, e
2) D tem um menor elemento.

O resultado de $\sup(C)$ vai ser o menor elemento de D.

Sup e Inf

A definição informal abaixo também funciona:
Se $C \subseteq \mathbb{R}$ então $\sup(C)$ é o menor elemento de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ que está "acima" de todos os elementos de C.

e, similarmente...

Se $C \subseteq \mathbb{R}$ então $\inf(C)$ é o maior elemento de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ que está "abaixo" de todos os elementos de C.

Exercício 14. Calcule:
a) $\sup(\{2, 3, 4\})$ e $\inf(\{2, 3, 4\})$
b) $\sup([2, 4])$ e $\inf([2, 4])$
c) $\sup((2, 4))$ e $\inf((2, 4))$
d) $\sup(\mathbb{R})$ e $\inf(\mathbb{R})$
e) $\sup(\emptyset)$ e $\inf(\emptyset)$

Algumas abreviações (2)

$$
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{R}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{Trap}] & = & \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[\mathrm{M}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\mathrm{min}] & = & \sum_{i=1}^{N} \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{max}] & = & \sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{inf}] & = & \sum_{i=1}^{N} \inf(f([a_i, b_i])(b_i - a_i) \\
[\mathrm{sup}] & = & \sum_{i=1}^{N} \sup(f([a_i, b_i])(b_i - a_i)
\end{array}
$$

Os métodos [inf] e [sup] são novos...

Eles correspondem ao que a página da Wikipedia chama de “Soma de Riemann Inferior” e “Soma de Riemann Superior”.

Uma versão “consertada” do exercício 4

Exercício 15. Seja $P = \{1, 1.5, 3, 4\}$. Faça um gráfico como o do item (f) do exercício 1 para

$$[\text{inf}] \le \int_{x=1}^{x=4} f(x)\,dx \le [\text{sup}].$$

e verifique que agora a curva $y = f(x)$ está entre [inf] e [sup].

Cálculo 2 - 2020.2

Aula 8: integrais de funções escada

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

Dê uma olhada nas propriedades da integral que o Pierluigi Beneveri demonstra (!!!) nas páginas 5 a 8 das notas dele:

`https://www.ime.usp.br/~pluigi/registro-MAT121-15.pdf`

`http://angg.twu.net/2020.2-C2/pierluigi_beneveri_MAT121-15.pdf`

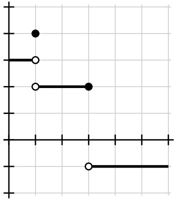
As demonstrações *formais*, como ele faz, com estimativas e somatórios, não nos interessam neste curso... mas todas as demonstrações dele podem ser "traduzidas" pra argumentos visuais como os que você deve ter entendido fazendo os exercícios da aula passada.

Nos exercícios de hoje nós vamos usar principalmente o Exercício 18 da página 5 das notas do Pierluigi e a Proposição 8/Propriedade 4 da página 7.

Leia também a Definição 9 na página 8, principalmente os comentários (1) e (2)... hoje nós vamos começar a ter que lidar com "áreas negativas"!

Funções escada

Uma **função escada** é uma cujo gráfico é composto por um número finito de segmentos horizontais e um número finito – talvez zero – de pontos isolados. Por exemplo:

$f(x) \quad =$ 

Exercício 1.

Calcule:

a) $\int_{x=0}^{x=1} f(x)\,dx$

b) $\int_{x=1}^{x=3} f(x)\,dx$

c) $\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx$

d) $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx \qquad$ (veja o exercício 3)

Exercício 2.

Agora vamos tentar integrar a $f(x)$ da página anterior usando as definições dos slides que usamos nas últimas aulas...
Seja $[a, b]$ o intervalo $[0, 3]$.
Seja $\{P_0, P_1, P_2, \ldots\}$ a nossa sequência preferida de partições do intervalo $[a, b]$.

a) Quantos intervalos tem P_{10}?

b) Quantos pontos tem P_{10}?

c) Qual é a largura de cada intervalo de P_{10}?

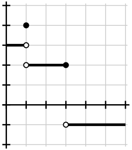
d) Represente graficamente $\overline{\int}_{P_{10}} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_{10}} f(x)\,dx$.

e) A resposta do item anterior é um retângulo. Qual é a sua base? Qual é a sua altura? Qual é a sua área?

f) Calcule $\overline{\int}_{P_{10}} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_{10}} f(x)\,dx$.

g) Calcule $\overline{\int}_{P_{1000}} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_{1000}} f(x)\,dx$.

Exercício 3.
Seja f esta função (a mesma do slide 3):

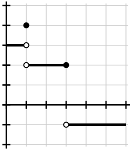
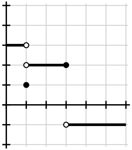
$f(x) =$ 

Dá pra calcular $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$ assim:

$$\begin{array}{rcl} \int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx & = & \int_{x=0}^{x=1} f(x)\,dx + \int_{x=1}^{x=3} f(x)\,dx + \int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx \\ & = & 3 \cdot (1-0) + 2 \cdot (3-1) + (-1) \cdot (4-3) \\ & = & 3+4-1 \quad = \quad 6 \end{array}$$

Descubra quais propriedades/proposições/exercícios/etc do Pierluigi nós usamos em cada '=' acima.

Exercício 4.
Sejam f e g estas funções:

$f(x) =$  $g(x) =$ 

Elas são integráveis no intervalo $[0,4]$
e só diferem no ponto $x=1$, $1 \in [0,4]$...
Então $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=4} g(x)\,dx$.

Acho que o Pierluigi não explica explicitamente porque esse "então" é verdade. Vamos ver isto passo a passo.

a) Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. (Fica implícito que é "$\forall x$".)
Faça o gráfico da $h(x)$.

Exercício 4 (cont.)

b) Calcule $\overline{\int}_{P_{10}} h(x)\,dx - \underline{\int}_{P_{10}} h(x)\,dx$.

c) Calcule $\overline{\int}_{P_{1000}} h(x)\,dx - \underline{\int}_{P_{1000}} h(x)\,dx$.

d) Conclua que $\int_{x=0}^{x=4} h(x)\,dx = 0$.

Dá pra provar que $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=4} g(x)\,dx$ assim:

$$\begin{array}{rcl}
\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx & = & \int_{x=0}^{x=4} g(x) + h(x)\,dx \\
& = & \int_{x=0}^{x=4} g(x)\,dx + \int_{x=0}^{x=4} h(x)\,dx \\
& = & \int_{x=0}^{x=4} g(x)\,dx + 0 \\
& = & \int_{x=0}^{x=4} g(x)\,dx
\end{array}$$

e) Descubra quais propriedades/proposições/exercícios/etc do Pierluigi nós usamos em cada '=' acima.

Até agora eu dei muito poucas dicas sobre como vocês devem escrever as soluções dos exercícios... isso foi de propósito. O nível de detalhe esperado varia de acordo com o contexto, e até agora vocês só precisavam de soluções que vocês mesmos entendessem e tivessem certeza de cada passo, e que os colegas de vocês entendessem quando vocês fossem discutir com eles.

Leia a "dica 7" daqui:

`http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=5`

Aliás, leia as páginas 4 e 5 inteiras.

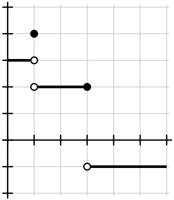
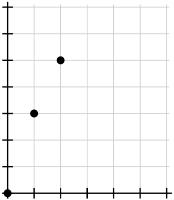
Depois leia este texto que mandei pras turmas de C2 depois da P1 do semestre passado:

`http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-P1.pdf#page=10`

Exercício 5.

Seja $F(b) = \int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$.

a) Calcule $F(0)$, $F(0.5)$, $F(1)$, $F(1.5)$, $\ldots$, $F(6)$ e represente os valores que você obteve num gráfico. No gráfico à direita abaixo eu representei os pontos $(0, F(0))$, $(1, F(1))$ e $(2, F(2))$ — faça os outros.

$f(x) =$  $F(b) =$ 

b) Represente graficamente $\int_{x=0}^{x=1.5} f(x)\,dx - \int_{x=0}^{x=0.5} f(x)\,dx$ como uma área no gráfico da f.

c) Represente graficamente $F(1.5) - F(0.5)$ no gráfico da F.

Exercício 5 (cont.)

Nos itens (b) e (c) do slide anterior nós vimos que uma diferença

$$F(d) - F(c) = \int_{x=0}^{x=d} f(x)\,dx - \int_{x=0}^{x=c} f(x)\,dx$$

pode ser interpretada tanto como uma área no gráfico à esquerda quanto como uma diferença de altura no gráfico à direita. Nos próximos itens você vai ter que usar essa dupla interpretação em todo lugar.

d) Verifique que $F(1.3) - F(1.2)$, $F(1.4) - F(1.3)$, $F(1.5) - F(1.4)$ e $F(1.6) - F(1.5)$ são retângulos com a mesma área — e verifique que isto quer dizer que os pontos $(1.2, F(1.2))$, $(1.3, F(1.3))$, $(1.4, F(1.4))$, $(1.5, F(1.5))$ e $(1.6, F(1.6))$ estão na mesma reta. Qual é base e a altura de cada um desses retângulos? Qual é o coeficiente angular dessa reta?

e) Faça o mesmo para estes valores de x: 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 — as alturas e o coeficiente angular vão mudar.

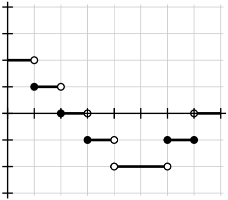
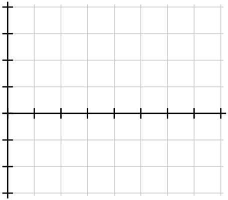
Exercício 5 (cont.)

A $F(b)$ vai ser contínua, e o gráfico dela vai ser formado por três segmentos de reta. Pense sozinho em porque isto é verdade — nós vamos demonstrar isto em breve.

f) Complete o gráfico da $F(b)$ (do item a).
g) Em que pontos a $F(b)$ é derivável?
h) Em que pontos a $F(b)$ não é derivável?
i) Seja $g(b) = \frac{d}{db}F(b)$. Faça o gráfico da $g(b)$.
j) Qual é o domínio da $g(b)$?
k) Em que pontos $f(x)$ e $g(b)$ coincidem?

Exercício 6.

Agora que você entendeu a relação entre a $f(x)$ e $F(b) = \int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$ num caso específico você vai tentar fazer um outro caso. Seja $f(x)$ a função à esquerda abaixo, e desenhe o gráfico da $F(b)$ — o "gráfico da integral de $f(x)$" — à direita. Obs: depois que a gente tem prática dá pra resolver problemas assim sem nenhum erro em poucos segundos! Sério!!!

$f(x) \quad =$  $\qquad F(b) = \displaystyle\int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx =$ 

Exercício 7.

No exercício 6 você fez o gráfico de $F(b) = \int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$.

b) Agora faça o gráfico de $G(b) = \int_{x=1}^{x=b} f(x)\,dx$,

c) ...e o gráfico de $H(b) = \int_{x=2}^{x=b} f(x)\,dx$.

Você provavelmente desenhou o gráfico da sua $G(b)$ como se ela só estivesse definida a partir de $b = 1$, e o gráfico da $H(b)$ como se ela só estivesse definida a partir de $b = 2$. Isso pode ser melhorado. Dê uma olhada na página 10 das notas do Pierluigi, onde ele define "integrais com extremos na ordem inversa" por esta regra aqui:

$$\int_{x=b}^{x=a} f(x)\,dx = -\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

d) Calcule $G(0.5)$.

Exercício 7 (cont.)

e) Agora que você aprendeu a calcular $G(b)$ para $b < 1$ usando o truque da "integral com extremos na ordem inversa" faça uma versão melhorada do gráfico do item (b) na qual o seu gráfico da $G(b)$ inclua os valores de $G(b)$ para $b \in [0, 1]$.

f) Faça o mesmo para o item (c): faça uma versão melhorada do gráfico da $H(b)$.

g) (Importantíssimo!) Verifique que tanto $F(b)$ quanto $G(b)$ e $H(b)$ são funções contínuas que obedecem

$$F'(b) = G'(b) = H'(b) = f(b)$$

em todos os pontos em que essas derivadas fazem sentido — que são exatamente os pontos em que a $f(b)$ é contínua.

Primitivas

As funções $F(x)$, $G(x)$ e $H(x)$ que você obteve no exercícios 6 e 7 são "primitivas" da função $f(x)$. A definição usual de primitiva que você vai encontrar nos livros é esta aqui:

> Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Dizemos que uma função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma *primitiva de f* quando $\forall x \in (a,b).\ F'(x) = f(x)$.

Primitivas (2)

Nós vamos usar uma definição um pouco mais complicada de primitiva... esta aqui:

> Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, seja P uma partição de $[a,b]$, e digamos que a função f seja contínua em cada intervalo aberto (a_i, b_i) da partição — ou seja, f não precisa ser contínua nos pontos de P. Uma função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma *primitiva de f* se: 1) F é contínua em $[a,b]$, 2) F é derivável em todos os pontos de $[a,b] \backslash P$, 3) $\forall x \in [a,b] \backslash P.\ F'(x) = f(x)$.

Exercício 8.

Verifique que as funções $F(x)$, $G(x)$ e $H(x)$ dos exercícios 6 e 7 são primitivas para a função $f(x)$ do slide 12. Dica: você vai ter que escolher $[a,b]$ e P da forma certa.

Primitivas: como usar

Se a função $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma primitiva da função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $c,d\in[a,b]$, então podemos usar a F pra calcular integrais da f:

$$\int_{x=c}^{x=d} f(x)\,dx = F(d)-F(c)$$

Isto é exatamente o que você fez nos exercício 5b e 5c, mas lá estávamos olhando pra um caso particular muito simples... Isto vale em geral, mesmo quando a nossa função $f(x)$ não é uma função escada...

...por exemplo, isto vale pra "nossa função preferida" das primeiras aulas, $f(x)=4-(x-2)^2$, cujo gráfico é um pedaço de parábola.

Exercício 9.

Sejam $f(x) = 4 - (x-2)^2$ e $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$.

a) Verifique que a função F é uma primitiva para a f.

b) Verifique que a função $G(x) = F(x) + 200$ é uma outra primitiva para a f.

c) Calcule $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$ usando isto aqui:

$$\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx = F(4) - F(0)$$

d) Relembre os modos de obter aproximações para integrais que você aprendeu muitas aulas atrás... por exemplo, o método dos trapézios dá resultados bastante bons. Compare os resultados dessas aproximações com o resultado exato da área $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$ que você acabou de obter.

Cálculo 2 - 2020.2

Mini-teste 1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

Regras para o mini-teste

As questões do mini-teste serão disponibilizadas às 20:00 da sexta-feira 12/março/2021 e você deverá entregar as respostas escritas à mão até as 20:00 do sábado 13/março/2021 na plataforma Classroom; desenhos feitos no computador serão ignorados.

Se o Classroom der algum problema mande também para este endereço de e-mail:

eduardoochs@gmail.com

Mini-testes entregues após este horário não serão considerados.

Durante as 24 horas do mini-teste nem o professor nem o monitor responderão perguntas sobre os assuntos do mini-teste mas você pode discutir com os seus colegas — inclusive no grupo da turma.

Este mini-teste vale 0.5 pontos extras na P1.

Dicas

Leia a “dica 7” daqui:

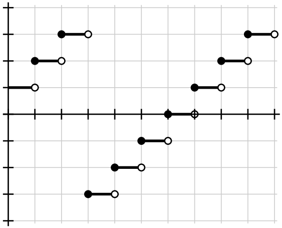
http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=5

Além disso revise **MUITO** bem as suas respostas!
Leia esta bronca que eu dei na turma de C2 do semestre passado:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-P1.pdf#page=10

Mini-teste

Seja $f(x)$ esta função,

$f(x) \quad =$ 

e sejam

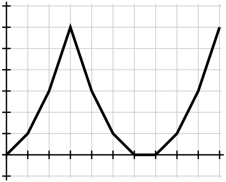
$$F(b) \quad = \quad \int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx,$$

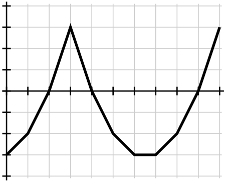
$$G(b) \quad = \quad \int_{x=2}^{x=b} f(x)\,dx.$$

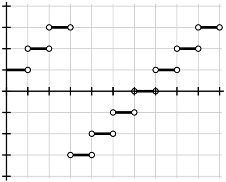
a) Faça o gráfico da $F(b)$. Obs: $F : [0, 10] \to \mathbb{R}$.
b) Faça o gráfico da $G(b)$. Obs: $G : [0, 10] \to \mathbb{R}$.
c) Faça o gráfico da derivada da $F(b)$.

Dicas: pra calcular $G(b)$ quando $b \in [0, 2)$ você vai precisar de umas idéias que a gente viu no exercício 7 dos últimos slides. No item c) indique os pontos onde a $F(b)$ não é derivável.

Gabarito

$F(b) \quad =$ 

$G(b) \quad =$ 

$F'(b) \quad =$ 

Cálculo 2 - 2020.2

Aula 12: o TFC2.

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

Na aula passada nós vimos esta versão do segundo Teorema Fundamental do Cálculo:

> Se a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma primitiva da função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $c, d \in [a,b]$, então:
>
> $$\int_{x=c}^{x=d} f(x)\,dx \quad = \quad F(x)\big|_{x=c}^{x=d}$$

A notação "$F(x)|_{x=c}^{x=d}$" é novidade. A pronúncia de "$F(x)|_{x=c}^{x=d}$" é "a diferença do valor de $F(x)$ entre $x = c$ para $x = d$", e a definição formal é:

$$\begin{array}{rcl} F(x)|_{x=c}^{x=d} & = & F(x)[x := d] - F(x)[x := c] \\ & = & F(d) - F(c). \end{array}$$

Nós não vimos uma demostração do TFC2... vimos só uns argumentos que devem ter convencido vocês de que ele vale pra todas as funções escada. As notas do Pierluigi têm um esboço da demonstração, mas ele pula um monte de detalhes. A demonstração completa é bem grande e não nos interessa neste curso — nós queremos usar o TFC2 pra calcular um monte de coisas.

Nesta aula e nas próximas nós vamos tratar o TFC2 como esta igualdade,

$$[\mathsf{TFC2}] \quad = \quad \left(\int_{x=c}^{x=d} F'(x)\,dx = F(x)\big|_{x=c}^{x=d} \right)$$

que vai valer para toda $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável e para todos os $c, d \in [a,b]$, e nós vamos usar a operação $[:=]$ para obter casos particulares desta fórmula.

(Sobre o TFC1: ele praticamente só serve pra demonstrar o TFC2...)

Digamos que queremos “integrar” isto:

$$\int_{x=3}^{x=4} e^{2x} \cos(e^{2x})\, dx = {\color{red}?}$$

Podemos usar o TFC2 várias vezes, chutando ‘a’s, ‘b’s e ‘F’s...

$$\begin{array}{rcl}
\textsf{[TFC2]}\begin{bmatrix} d{:=}200 \\ c{:=}42 \\ F(x){:=}\operatorname{sen} x \\ F'(x){:=}\cos x \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=42}^{x=200} \cos x\, dx = (\operatorname{sen} x)\big|_{x=42}^{x=200} \right) \\
\textsf{[TFC2]}\begin{bmatrix} d{:=}4 \\ c{:=}3 \\ F(x){:=}\operatorname{sen}(e^{2x}) \\ F'(x){:=}(2e^{2x})\cos(e^{2x})) \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=3}^{x=4} (2e^{2x})\cos(e^{2x}))\, dx = \big(\operatorname{sen}(e^{2x})\big)\big|_{x=3}^{x=4} \right) \\
\textsf{[TFC2]}\begin{bmatrix} d{:=}4 \\ c{:=}3 \\ F(x){:=}\frac{1}{2}\operatorname{sen}(e^{2x}) \\ F'(x){:=}e^{2x}\cos(e^{2x})) \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=3}^{x=4} e^{2x}\cos(e^{2x}))\, dx = \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(e^{2x})\right)\Bigg|_{x=3}^{x=4} \right)
\end{array}$$

Ou seja: ${\color{red}?} = \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(e^{2x})\right)\Big|_{x=3}^{x=4}$,
que dá pra calcular em tempo finito — se soubermos calcular senos e exponenciais em tempo finito.

Vamos chamar o método do slide anterior de "integração por TFC2 e chutar-e-testar".

Exercício 1.

Integre por TFC2 e chutar-e-testar:

a) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos x \, dx = ?$

b) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x \, dx = ?$

c) $\displaystyle\int_{x=\pi/2}^{x=\pi} \operatorname{sen} x \, dx = ?$

d) $\displaystyle\int_{x=5}^{x=6} \operatorname{sen}(2x+3) \, dx = ?$

Exercício 2.
Faça os 5 primeiros itens do Exercício 35 das notas do Pierluigi.

(Uma definição para) a integral indefinida
Dê uma olhada na seção 4.2.2 do Martins/Martins.
Eles usam o "$+\,C$" na definição de integral indefinida.
A maioria dos livros faz isso, mas isso gera algumas ambiguidades que eu prefiro evitar...

Eu vou usar esta definição aqui para a integral indefinida.
As duas igualdades abaixo são exatamente equivalentes:

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int f(x)\,dx & = & F(x) \\ f(x) & = & \frac{d}{dx}F(x) \end{array}$$

Ou seja: pra determinar se uma igualdade da forma "$\int f(x)\,dx \;=\; F(x)$" é verdade, traduza ela, e teste se a igualdade $f(x) \;=\; \frac{d}{dx}F(x)$ é verdade.

Exercício 3.
Quais das igualdades abaixo são verdade?
a) $\int \operatorname{sen} x \, dx = \cos x$
b) $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$
c) $\int x^4 \, dx = 5x^5$
d) $\int x^4 \, dx = \frac{1}{5}x^5$
e) $\int x^4 \, dx = \frac{1}{5}x^5 + 42$

Exercício 4.
As duas igualdades em

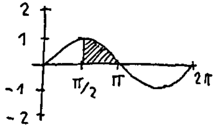
$$42 \quad = \quad \int 0 \; dx \quad = \quad 200$$

são verdadeiras. Porque é que isto não implica em $42 = 200$?

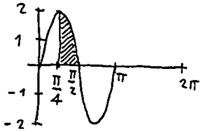
(Introdução à) integração por substituição

Repare que estas duas integrais correspondem a áreas iguais:
(amasse os gráficos na horizontal e estique eles na vertical)

$$\int_{x=\pi/2}^{x=\pi} \operatorname{sen} x \, dx \quad = \quad \text{Área}$$



$$\int_{x=\pi/4}^{x=\pi/2} 2 \operatorname{sen} 2x \, dx \quad = \quad \text{Área}$$



Vamos ver como transformar a segunda integral,
que é complicada, na primeira, que é mais simples.

(Introdução à) integração por substituição (2)

Isto aqui é uma demonstração feita de uma sequência de três igualdades, e um caso particular dela...

$$
[\mathsf{S1}] \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc}
f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \\
\parallel & & \\
f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du
\end{array} \right)
$$

$$
[\mathsf{S1}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc}
f(2x)\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(2x)\cdot 2\,dx \\
\parallel & & \\
f(u)\big|_{u=2a}^{u=2b} & = & \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} f'(u)\,du
\end{array} \right)
$$

Lembre que:

$$[\mathsf{TFC2}] \;\; = \;\; \left(\int_{x=c}^{x=d} F'(x)\,dx = \; F(x)\big|_{x=c}^{x=d} \right)$$

Exercício 5.

a) Qual é o resultado da substituição $[\mathsf{TFC2}] \begin{bmatrix} d{:=}b \\ c{:=}a \\ F(x){:=}f(g(x)) \\ F'(x){:=}f'(g(x))g'(x) \end{bmatrix}$?

b) Qual é o resultado de $[\mathsf{TFC2}][x := u] \begin{bmatrix} d{:=}g(b) \\ c{:=}g(a) \\ F(u){:=}f(u) \\ F'(u){:=}f'(u) \end{bmatrix}$?

c) Verifique que:

$$f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} = f(g(b)) - f(g(a)) = \; f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)}$$

d) Os itens (a), (b) e (c) provam as três igualdades da $[\mathsf{S1}]$?

Exercício 6.
No slide 9 eu disse, sem demonstração, que:

$$\int_{x=\pi/2}^{x=\pi} \operatorname{sen} x\, dx \quad = \quad \int_{x=\pi/4}^{x=\pi/2} 2 \operatorname{sen} 2x\, dx \qquad (*)$$

e no slide 10 a gente começou a transformar [S1] numa demonstração de $(*)$.
Descubra o que colocar em cada um dos '?'s abaixo para obter uma demonstração de $(*)$:

$$[\mathsf{S1}] \begin{bmatrix} g(x):=2x \\ g'(x):=2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(u):=? \\ f'(u):=? \end{bmatrix} \left[\begin{smallmatrix} b:=? \\ a:=? \end{smallmatrix} \right]$$

No slide 9 eu disse que a gente ia aprender a transformar integrais mais complicadas em integrais mais simples. No exercício 1d você deve ter passado um tempão tentando resolver *direto* uma integral complicada. O truque é esse aqui. As [S2] e [S3] do próximo slide são consequências da [S1] do slide 10, que você demonstrou no exercício 5...

Dica **MUITO** importante que **MUITAS** pessoas levam **MUITO** tempo pra entender: No item c do próximo slide você vai substituir a f mas não a F, e a primeira linha da [S2] vai virar "Se $F'(u) = \tan u$ então:"...

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{ccc} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S3}] \quad = \quad \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

Exercício 7.

a) $[\mathsf{S3}]\,[g(x) := x^2] = ?$

b) $[\mathsf{S3}] \begin{bmatrix} f(u){:=}\tan u \\ g(x){:=}x^2 \end{bmatrix} = ?$

c) $[\mathsf{S2}] \begin{bmatrix} f(u){:=}\tan u \\ g(x){:=}x^2 \end{bmatrix} = ?$

$$[\mathsf{S1}] = \left(\begin{array}{ccc} f(g(x))|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \\ \shortparallel & & \\ f(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S1}] \left[\begin{smallmatrix} g(x):=2x \\ g'(x):=2 \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} f(u):=? \\ f'(u):=? \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} b:=? \\ a:=? \end{smallmatrix} \right]$$

Cálculo 2 - 2020.2

Aula 14: integração por substituição.

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

Nos slides anteriores nós vimos como demonstrar a fórmula [S2], e *começamos* a ver como usá-la na prática... na verdade a gente costuma usar uma versão da [S2] para integrais *indefinidas*, em que a gente primeiro faz as contas de uma forma abreviada, omitindo todos os limites de integração e depois a gente recoloca eles.

A nossa versão para integrais indefinidas da [S2] vai ser a [S2I] do próximo slide. Repare na linha

$$\text{“Obs: } u = g(x)\text{”}$$

no final da [S2I] — ela vai ser importante pra evitar ambiguidades.

No slide seguinte eu pus a nossa versão para integrais indefinidas da [S3], que eu chamei de [S3I].

$$
[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)
$$

$$
[\mathsf{S2I}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)
$$

$$[\mathsf{S3}] \quad = \quad \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{pmatrix}$$

$$[\mathsf{S3I}] \quad = \quad \begin{pmatrix} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{pmatrix}$$

Exercício 1.
Calcule os resultados das substituições abaixo:

a) $[\mathsf{S2I}]\,[g(x) := 3x+4]$
b) $[\mathsf{S2I}]\,[g(x) := 3x+4]\,[f(u) := \frac{2}{3}\cos u]$
c) $[\mathsf{S3I}]\,[g(x) := 3x+4]$
d) $[\mathsf{S3I}]\,[g(x) := 3x+4]\,[f(u) := \frac{2}{3}\cos u]$

Mais dicas sobre a operação '[:=]'

Nas duas substituições abaixo a primeira está certa
e a segunda está errada:

$$\begin{array}{rcl} (x+2=5)\,[x:=4] & = & (4+2=5) \\ (x+2=5)\,[x:=4] & = & (6=5) \end{array}$$

O '=' depois de uma substituição tem um significado especial: a pronúncia dele é "o resultado da substituição à esquerda é a expressão à direita", e na segunda linha a gente fez mais coisas além de só substituir todos os 'x's por '4's.

Note que isto aqui está certo:

$$\begin{array}{rcl} (x+2=5)\,[x:=4] & = & (4+2=5) \\ & = & (6=5) \end{array}$$

Mais dicas sobre a operação '[:=]' (2)

Aqui a primeira está certa e a segunda está errada...
Na segunda um 'u' foi substituido por 'e^{2x}'!!!!!!!! $=($

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{pmatrix} [g(x) := e^{2x}] \quad = \quad \begin{pmatrix} \displaystyle\int f(2^{2x})(2e^{2x})\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = e^{2x}. \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{pmatrix} [g(x) := e^{2x}] \quad = \quad \begin{pmatrix} \displaystyle\int f(2^{2x})(2e^{2x})\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(e^{2x})\,du \\ \text{Obs: } u = e^{2x}. \end{pmatrix}$$

Mais dicas sobre a operação '[:=]' (3)

No primeiro PDF do curso nós usamos a operação '[:=]' para testar EDOs como $f'(x) = x^4$ em vários "valores" de f, pra tentar resolver EDOs por chutar-e-testar... Em

$$(f'(x) = x^4)\,[f(x) := x^2] = (2x = x^4)$$

na expressão original, $(f'(x) = x^4)$, o símbolo f faz o papel de uma função qualquer, ou de uma variável cujo valor é uma função; a substiuição "$[f(x) := x^2]$" diz como substituir a f original, genérica, pela f que tem esta *definição* aqui: $f(x) = x^2$... e nós já temos bastante prática com obter consequencias de uma definição como $f(x) = x^2$. Por exemplo:

$$\begin{array}{rcl}
f(200) & = & 200^2 \\
f(3u+4) & = & (3u+4)^2 \\
f(42x^3+99) & = & (42x^3+99)^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
f'(x) & = & 2x \\
f'(3u+4) & = & 2(3u+4) \\
f'(42x^3+99) & = & 2(42x^3+99)
\end{array}$$

Exemplo com gambiarras

Isto aqui é um exemplo de como contas com integração por substituição costumam ser feitas na prática:

$$\begin{aligned}
&\int 2\cos(3x+4)\,dx \\
&= \int 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\
&= \frac{2}{3}\int \cos u\,du \\
&= \frac{2}{3}\operatorname{sen} u \\
&= \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3x+4)
\end{aligned}$$

A "Obs: $u = 3x + 4$" costuma ser posta no texto em português antes ou depois das contas, ou omitida (!!!)...

A gambiarra nos livros
Dê uma olhada na página 165 do Martins/Martins.
Eles pulam **MUITOS** passos, e dizem

> Fazendo $u = g(x)$, $du = g'(x)\,dx$, e substituindo em (A)...

A idéia é esta aqui:

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\, \underbrace{\underbrace{g'(x)}_{\frac{du}{dx}}\, dx}_{du} \;=\; \int f(u)\,du$$

mas nós só vamos ver um jeito de dar um significado
preciso pra esse “$\frac{du}{dx}dx = du$” em Cálculo 3...
(Dê uma olhada também na “Aula 4” da Cristiane Hernández).

Exercício 2.

a) Faça as gambiarras do slide anterior nesta integral daqui,

$$\int (1 - (\operatorname{sen} x)^2)(\operatorname{sen} x)^3 \cos x \, dx$$

para transformá-la numa integral em u. Use $u = \operatorname{sen} x$.

b) Resolva a integral em u que você acabou de obter.
(O resultado dela vai ser um polinômio em u).

c) Junte tudo numa série de igualdades como as do "exemplo com gambiarras". No final você deve chegar num expressão em x sem sinal de integral.

Integrais de potências de senos e cossenos

Exemplo 1

$$
\begin{aligned}
& \int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 \, dx \\
= \quad & \int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 (\cos x) \, dx \\
= \quad & \int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^5 \underbrace{(\cos x)^2}_{1-s^2} \underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}} \, dx \\
= \quad & \int s^5 (1 - s^2) \, ds \\
= \quad & \int s^5 - s^7 \, ds \\
= \quad & \frac{s^6}{6} - \frac{s^8}{8} \\
= \quad & \frac{(\operatorname{sen} x)^6}{6} - \frac{(\operatorname{sen} x)^8}{8}
\end{aligned}
\qquad
\left[\begin{array}{c}
s = \operatorname{sen} x \\
\frac{ds}{dx} = \cos x \\
\operatorname{sen} x = s \\
(\cos x)^2 = 1 - s^2 \\
\cos x \, dx = ds
\end{array} \right]
$$

Exemplo 1: verificação

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\frac{(\operatorname{sen} x)^6}{6} - \frac{(\operatorname{sen} x)^8}{8}\right)\\
&= \frac{6(\operatorname{sen} x)^5 \cos x}{6} - \frac{8(\operatorname{sen} x)^7 \cos x}{8}\\
&= ((\operatorname{sen} x)^5 - (\operatorname{sen} x)^7) \cos x\\
&= ((\operatorname{sen} x)^5 (1 - (\operatorname{sen} x)^2)) \cos x\\
&= (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 \cos x\\
&= (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3
\end{aligned}$$

As anotações à direita

Note que à direita das contas do exemplo 1 tinha isso aqui:

$$\left[\begin{array}{c} s = \operatorname{sen} x \\ \frac{ds}{dx} = \cos x \\ \operatorname{sen} x = s \\ (\cos x)^2 = 1 - s^2 \\ \cos x \, dx = ds \end{array}\right]$$

que à primeira vista parece com a operação '[:=]',
mas exceto pela primeira linha ele não segue nenhuma
das convenções sobre o '[:=]' que vimos aqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-intro.pdf#page=6

E ainda por cima ele é usado duas vezes, uma pra mudar
de x pra s e outra pra voltar pra x!...

Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
&\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 \, dx \\
= \quad & \int (\operatorname{sen} x)^4 (\cos x)^2 \operatorname{sen} x \, dx \\
= \quad & \int (\underbrace{(\operatorname{sen} x)^2}_{1-c^2})^2 \underbrace{(\cos x)^2}_{c^2} \underbrace{(\operatorname{sen} x)}_{-\frac{dc}{dx}} \, dx \\
= \quad & \int (1 - c^2)^2 c^2 \, dc \\
= \quad & \int (c^4 - 2c^2 + 1) c^2 (-1) \, dc \\
= \quad & \int -c^6 + 2c^4 - c^2 \, dc \\
= \quad & \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\left[
\begin{array}{c}
c = \cos x \\
\frac{dc}{dx} = -\operatorname{sen} x \\
\cos x = c \\
(\operatorname{sen} x)^2 = 1 - c^2 \\
\operatorname{sen} x \, dx = (-1) \, dc
\end{array}
\right]
$$

Exercício 3.

a) Calcule a integral do exemplo 1 – $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 \, dx$ – usando a substituição $c = \cos x$ ao invés de $s = \operatorname{sen} x$.

b) Teste o seu resultado.

Dica: em algum lugar do teste você vai precisar da identidade $(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 = 1$... nós vamos começar a usar identidades trigonométricas a beça.

Dica importante

Pra integrar algo como:

$$\int (\operatorname{sen} x)^\alpha (\cos x)^\beta \, dx$$

Se tanto α quanto β são ímpares as duas subtituições, $s = \operatorname{sen} x$ e $c = \cos x$, funcionam.

Se só um dos dois é ímpar só uma delas funciona (não vou dizer qual).

Se tanto α quanto β são pares aí nenhuma das duas substituições funciona, e a gente vai precisar de técnicas mais avançadas que vamos ver depois.

Introdução à Substituição Trigonométrica

$$
\begin{aligned}
&\int s\sqrt{1-s^2}\,ds \\
&= \int \operatorname{sen}\theta\sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}\cos\theta\,d\theta \\
&= \int \operatorname{sen}\theta\sqrt{(\cos\theta)^2}\cos\theta\,d\theta \\
&= \int \operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\theta\,d\theta \\
&= \int (\cos\theta)^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
&= \int c^2\cdot(-1)\,dc \\
&= -\tfrac{1}{3}c^3 \\
&= -\tfrac{1}{3}(\cos\theta)^3 \\
&= -\tfrac{1}{3}(\sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2})^3 \\
&= -\tfrac{1}{3}(\sqrt{1-s^2})^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} s=\operatorname{sen}\theta \\ \frac{ds}{d\theta}=\cos\theta \\ \cos\theta\,d\theta=ds \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} c=\cos\theta \\ \frac{dc}{d\theta}=-\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\,d\theta=(-1)\cdot dc \end{bmatrix}
$$

O exemplo da página anterior usa um monte de técnicas nada óbvias. A das cinco primeiras linhas dá isso aqui,

$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds = \int (\cos\theta)^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

Nós vamos começar aprendendo a fazer algo um pouco mais geral: vamos aprender a ajustar os 'α's, 'β's, 'γ's e 'δ's aqui,

$$\int s^\alpha(\sqrt{1-s^2})^\beta\,ds = \int (\cos\theta)^\gamma(\operatorname{sen}\theta)^\delta\,d\theta$$

e vamos aprender a fazer algo parecido para as substituições $t = \tan\theta$ e $z = \sec\theta$.

Eu vou chamar o '$\sqrt{1-s^2}$' de "o termo malvado" da integral $\int s\sqrt{1-s^2}\,ds$. É ele que faz essa integral ser muito difícil de resolver, e queremos nos livrar dele.

Abreviações

No exemplão do slide 20 as letras s, θ e c sempre denotam variáveis, exceto nas linhas

$$\frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \qquad \text{e} \qquad \frac{dc}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta$$

das anotações, que usam a "notação de Leibniz", na qual podemos definir coisas como "$s = \operatorname{sen}\theta$" e "$c = \cos\theta$" e aí tratar os '$s$'s e '$c$'s como abreviações para $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$...

Essas abreviações dão margem pra muita confusão e fazem as pessoas cometerem zilhões de erros de conta nos primeiros anos até elas terem vários anos de prática. Como vocês não têm anos pra praticar, nem têm bibliotecas super confortáveis em que vocês podem passar centenas de tardes estudando e discutindo junto com os colegas, nós só vamos usar essas abreviações em situações controladas.

Algumas identidades trigonométricas

A minha memória é péssima. Eu não consigo decorar praticamente nenhuma fórmula... mas eu consigo lembrar vagamente como rededuzir certas fórmulas, e aí eu sempre refaço as demonstrações.

No caso das identidades trigonométricas eu consigo rededuzir elas bastante rápido usando essas abreviações aqui embaixo à esquerda, e as fórmulas pra derivadas de produtos e quocientes de funções à direita:

$$\begin{aligned}
f &= f(x) \\
g &= g(x) \\
s &= \operatorname{sen}\theta \\
c &= \cos\theta \\
t &= \tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{s}{c} \\
z &= \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{1}{g} &= \frac{g'}{g^2} \\
\frac{d}{dx}\frac{f}{g} &= \frac{fg' - f'g}{g^2}
\end{aligned}$$

Algumas identidades trigonométricas (2)

$$
\begin{aligned}
z^2 &= (\tfrac{1}{c})^2 = \tfrac{1}{c^2} = \tfrac{c^2+s^2}{c^2} = \tfrac{c^2}{c^2} + \tfrac{s^2}{c^2} \\
&= 1 + (\tfrac{s}{c})^2 \\
&= 1 + t^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
c^2 + s^2 = 1 & \\
c^2 = 1 - s^2 & c = \sqrt{1 - s^2} \\
s^2 = 1 - c^2 & s = \sqrt{1 - c^2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
z^2 = 1 + t^2 & z = \sqrt{1 + t^2} \\
t^2 = z^2 - 1 & t = \sqrt{z^2 - 1}
\end{array}
$$

Algumas identidades trigonométricas (3)

$$\frac{ds}{d\theta} = c$$
$$\frac{dc}{d\theta} = -s$$
$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{s}{c} = \frac{s'c-sc'}{c^2} = \frac{cc-s\cdot(-s)}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2$$
$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{1}{c} = \frac{-c'}{c^2} = \frac{s}{c^2} = \frac{1}{c}\frac{s}{c} = zt$$

$$ds = \cos\theta\, d\theta$$

$$dc = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$dt = -(\sec\theta)^2\, d\theta$$

$$dz = \sec\theta \tan\theta\, d\theta$$

Cálculo 2 - 2020.2

Aula nn: substituição trigonométrica

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

No final destes slides aqui
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-int-subst.pdf#page=19
nós começamos a ver como fazer certas
"substituições trigonométricas"...
E nós vimos que:

$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds = \int (\cos\theta)^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

Exercício 1.
Generalize a igualdade dos slides passados.
Mais precisamente: digamos que $s = \operatorname{sen}\theta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.
Encontre fórmulas para γ e δ em

$$\int s^\alpha (\sqrt{1-s^2})^\beta \, ds = \int (\cos\theta)^\gamma (\operatorname{sen}\theta)^\delta \, d\theta$$

que façam esta igualdade ser verdadeira ($\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$).

Exercício 2.
Faça o mesmo para:

$$\int t^\alpha (\sqrt{1+t^2})^\beta \, dt = \int (\cos\theta)^\gamma (\operatorname{sen}\theta)^\delta \, d\theta$$

Aqui a substituição é $t = \tan\theta$
(e os detalhes são mais difíceis)...

Exercício 3.
Usando o que você aprendeu no exercício 1,
ajuste α e β aqui para que isto seja verdade:

$$\int s^{\alpha}(\sqrt{1-s^2})^{\beta}\,ds = \int (\cos\theta)^0 (\operatorname{sen}\theta)^0\,d\theta$$

Exercício 4.
Expanda esta série de igualdades aqui —
usando os valores adequados para α e β, óbvio —
pra obter uma série de igualdades que seja convincente pra alguém que tem pouca prática com integração por substituição:

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\int s^\alpha(\sqrt{1-s^2})^\beta\,ds & = & \displaystyle\int (\cos\theta)^0(\operatorname{sen}\theta)^0\,d\theta & \qquad (s=\operatorname{sen}\theta) \\
 & = & \displaystyle\int 1\,d\theta & \\
 & = & \theta & \\
 & = & \operatorname{arcsen} s &
\end{array}$$

Exercício 5.

A maioria dos livros de Cálculo têm uma "tabela de derivadas" e uma "tabela de integrais"... as do próximo slide são do APEX Calculus. Um jeito de usar as fórmulas dessas tabelas é dar nomes pra elas e usar o '[:=]'. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
[\mathsf{ApexDiff12}] &= \left(\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}\right) \\
[\mathsf{ApexDiff12}][a := 99] &= \left(\frac{d}{dx}\log_{99} x = \frac{1}{\ln 99}\cdot\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Encontre uma fórmula da tabela de derivadas do APEX Calculus e uma da tabela de integrais dele que se parecem com o que você descobriu no exercício 4.

Nós vamos aprender como demonstrar muitas fórmulas dessas tabelas.

Differentiation Rules

1. $\frac{d}{dx}(cx) = c$
2. $\frac{d}{dx}(u \pm v) = u' \pm v'$
3. $\frac{d}{dx}(u \cdot v) = uv' + u'v$
4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu' - uv'}{v^2}$
5. $\frac{d}{dx}(u(v)) = u'(v)v'$
6. $\frac{d}{dx}(c) = 0$
7. $\frac{d}{dx}(x) = 1$
8. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
9. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
10. $\frac{d}{dx}(a^x) = \ln a \cdot a^x$
11. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$
12. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$
13. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
14. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
15. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$
16. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
17. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
18. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
19. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
20. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
21. $\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
22. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
23. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$
24. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$
25. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$
26. $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$
27. $\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$
28. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$
29. $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$
30. $\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$
31. $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
32. $\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
33. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$
34. $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$
35. $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$
36. $\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$

Integration Rules

1. $\int c \cdot f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$
2. $\int f(x) \pm g(x)\, dx =$
   $\int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$
3. $\int 0\, dx = C$
4. $\int 1\, dx = x + C$
5. $\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ n \neq -1$
6. $\int e^x\, dx = e^x + C$
7. $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$
8. $\int a^x\, dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$
9. $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$
10. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
11. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
12. $\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C$
13. $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
14. $\int \csc x\, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$
15. $\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + C$
16. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
17. $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$
18. $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$
19. $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$
20. $\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$
21. $\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$
22. $\int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
23. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
24. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\, dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{|x|}{a}\right) + C$
25. $\int \cosh x\, dx = \sinh x + C$
26. $\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$
27. $\int \tanh x\, dx = \ln(\cosh x) + C$
28. $\int \coth x\, dx = \ln|\sinh x| + C$
29. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$
30. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C$
31. $\int \frac{1}{a^2-x^2}\, dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$
32. $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right) + C$
33. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\, dx = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right| + C$

Derivada da função inversa

Antes de continuar vamos rever uma fórmula que vocês devem ter visto bem superficialmente em Cálculo 1: a fórmula para a derivada da função inversa. A demonstração dela é esta aqui:

$$[\mathsf{DIFD}] = \left(\begin{array}{l} \text{Se } f(g(x)) = x \text{ então:} \\ \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x = 1 \\ \quad\;\; \| \\ f'(g(x))g'(x) \\ \\ \text{Portanto:} \\ g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)$$

Derivada da função inversa (2)

Um exemplo:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Se } f(g(x)) = x \text{ então:} \\ \\ \frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{d}{dx}x = 1 \\ \quad \| \\ f'(g(x))g'(x) \\ \\ \text{Portanto:} \\ g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))} \end{array}\right) \begin{bmatrix} f(u) := e^u \\ f'(u) := e^u \\ g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \text{Se } e^{\ln x} = x \text{ então:} \\ \\ \frac{d}{dx}e^{\ln x} = \frac{d}{dx}x = 1 \\ \quad \| \\ e^{\ln x} \ln' x \\ \\ \text{Portanto:} \\ \ln' x = \dfrac{1}{e^{\ln x}} \end{array}\right)$$

Neste caso a hipótese do teorema da DFI é verdadeira, então $\ln' x = \frac{1}{e^{\ln x}}$, e portanto $\ln' x = \frac{1}{x}$.

Exercício 6.

Calcule o resultado desta substituição:

$$\text{[DFID]} \begin{bmatrix} f(u) := \operatorname{sen} u \\ f'(u) := \cos u \\ g(x) := \operatorname{arcsen} s \\ g'(x) := \operatorname{arcsen}' s \end{bmatrix}$$

Exercício 7.

Dê um nome para a igualdade que você acabou de obter.
Lembre que você pode usar nomes péssimos e/ou nada a ver, como [Drácula], [agshTg7s], [Aliás], [Não], etc.

Exercício 8.

Dá pra usar identidades trigonométricas pra transformar o que você obteve nos exercícios 6 e 7 numa demonstração do [ApexDiff19].
Tente descobrir como.

Um modo de fazer o exercício 8

Eu pus uma solução escrita à mão no próximo slide.

Alguns comentários:

Num primeiro momento nós sabemos qual é a fórmula [ApexDiff19], mas ainda não sabemos como demonstrá-la; eu usei vários comentários em português pra deixar isso claro pro leitor. Além disso a maioria das demonstrações em Cálculo 2 são feitas por séries de igualdades em que o leitor deve conseguir entender porque cada uma daquelas igualdades é verdade, e em algumas das igualdades eu pus um comentário à direita pra ajudar o leitor a entendê-la.

A minha demonstração *poderia* dizer algo como

$$\text{Portanto} \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

no final, mas eu omiti isso. Como o "$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x$" aparece no início da série de igualdades e o "$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$" aparece no final dela eu considerei que esse "Portanto $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$" era óbvio.

NA TABELA DE DERIVADAS DO
APEX CALCULUS A FÓRMULA 19
É:

$$19.\ \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

VAMOS ESCREVÊ-LA COMO:

$$[\text{ApexDiff 19}] := \left(\text{arcsen}'\, x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

VAMOS TENTAR PROVÁ-LA.
NOS EXERCÍCIOS 6 E 7 NÓS PROVAMOS:

$$[\text{TRIGO}] := \left(\frac{d}{dx}\text{arcsen}\, x = \frac{1}{\cos(\text{arcsen}\, x}\right),$$

ENTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\text{arcsen}\ x &= \frac{1}{\cos(\text{arcsen}\ x)} && (\text{POR } [\text{TRIGO}]) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(\cos(\text{arcsen}\ x))^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(\text{sen}(\text{arcsen}\ x))^2}} && (\text{POR } (\cos\alpha)^2 = 1-(\text{sen}\,\alpha)^2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && (\text{POR } \text{sen}(\text{arcsen}\ x) = x)
\end{aligned}$$

Exercício 9.
Comece a organizar as coisas que você já conseguiu demonstrar numa tabela como as tabelas de derivadas e integrais do APEX calculus, mas em que cada item é da forma

$$[\mathsf{Nome}] \quad = \quad (\mathsf{expr}_1 = \mathsf{expr}_2)$$

A sua tabela de fórmulas não precisa ter as demonstrações, mas 1) você deve saber demonstrar cada fórmula dela se precisar, e 2) cada demonstração só pode depender fórmulas que aparecem antes na tabela.

Obs: este exercício é "permanente", no sentido de que você vai continuar a acrescentar mais fórmulas na sua tabela à medida que você aprender a demonstrá-las.

Cálculo 2 - 2020.2

Mini-teste 2.

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

Regras para o mini-teste

As questões do mini-teste serão disponibilizadas às 16:00 da sexta-feira 9/abril/2021 e você deverá entregar as respostas escritas à mão até as 20:00 do sábado 10/abril/2021 na plataforma Classroom; desenhos feitos no computador serão ignorados.

Se o Classroom der algum problema mande também para este endereço de e-mail:

eduardoochs@gmail.com

Mini-testes entregues após este horário não serão considerados.

Durante as 24 horas do mini-teste nem o professor nem o monitor responderão perguntas sobre os assuntos do mini-teste mas você pode discutir com os seus colegas — inclusive no grupo da turma.

Este mini-teste vale 0.5 pontos extras na P1.

Dicas

Leia a “dica 7” daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=5

Além disso revise **MUITO** bem as suas resposta!
Leia esta bronca que eu dei na turma de C2 do semestre passado:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-P1.pdf#page=10

O mini-teste vai ter uma questão só — uma integral que vocês vão ter que resolver fazendo duas substituições "comuns", ou seja, que não são nem as que usamos pra integrar potências de senos e cossenos e nem as da subtituição trigonométrica... vocês vão ter que escrever as contas bem passo a passo pondo os bloquinhos de anotações à direita e depois vocês vão ter que verificar o resultado.

Tem um exemplo de integração com anotações à direita aqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-int-subst.pdf#page=20

Links pra trechos de livros

Um bom lugar pra estudar é o capítulo 5 do Thomas.
Eu pus uma cópia dele aqui:

http://angg.twu.net/2020.2-C2/thomas_secoes_5.5_e_5.6.pdf

mas vou deletar esse link daqui a poucos dias pra não correr risco de receber ameaças da editora!!!

O miniteste

Calcule

$$\int \frac{(2\sqrt{x}+3)^{10}}{\sqrt{x}}\,dx$$

fazendo duas mudanças de variável e teste a sua resposta.

Cálculo 2 - 2020.2

Aula nn: frações parciais

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

Na aula passada nós vimos que $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$,
e portanto $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$ para $x > 0$.
Nós vamos deixar pra ver depois
como integrar $\int \frac{1}{x}\,dx$ em $x < 0$.

Exercício 1.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{3x}\,dx = ?$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+4}\,dx = ?$

c) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+4}\,dx = ?$

d) $\displaystyle\int \frac{a}{bx+c}\,dx = ?$

REPARE QUE:

$$\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5} = \frac{2(x+5)}{(x+3)(x+5)} + \frac{4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2(x+5) + 4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2x+10 + 4x+12}{x^2+8x+15}$$

$$= \frac{6x+22}{x^2+8x+15}$$

A MAIORIA DOS PROGRAMAS DE "COMPUTER ALGEBRA" TEM FUNÇÕES QUE FAZEM A OPERAÇÃO ACIMA E A INVERSA DELA:

$$\left(\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5}\right) \underset{\substack{\text{"apart"} \\ \text{(DIFÍCIL)}}}{\overset{\substack{\text{"together"} \\ \text{(FÁCIL)}}}{\rightleftarrows}} \left(\frac{6x+22}{x^2+8x+15}\right)$$

Exercício 2.

a) together $\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}\right) = ?$

b) together $\left(\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}\right) = ?$

c) together $\left(\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c}\right) = ?$

Exercício 3.

EXERCÍCIO:

a) ENCONTRE EXPRESSÕES PARA c, d, e, f QUE FAÇAM ESTA FÓRMULA SER VERDADE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f}$$

AS SUAS FÓRMULAS PARA c, d, e, f NÃO PODEM CONTER "x".

b) USE A FÓRMULA QUE VOCÊ ACABOU DE OBTER PARA ENCONTRAR OS A, a, B, b TAIS QUE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{2x+3}{x^2-7+10}$$

Slogan: contas sem “vai um” podem ser traduzidas pra contas com polinômios.

O que mais nos interessa pra Frações Parciais é divisão com resto. Exemplo:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & 7 & 7 & 3 & 12 \\ \cline{5-5}
-2 & 4 & & & 231 \\ \cline{1-2}
 & 3 & 7 & & \\
- & 3 & 6 & & \\ \cline{2-3}
 & & 1 & 3 & \\
 & - & 1 & 2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
2400 &= 200 \cdot 12 \\
360 &= 30 \cdot 12 \\
12 &= 1 \cdot 12 \\
2772 &= 231 \cdot 12 \\
2773 &= 231 \cdot 12 + 1
\end{aligned}
$$

...e tradução do exemplo para polinômios:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2x^3+7x^2+7x+3 & x+2 \\ \cline{3-3}
 & -(2x^3+4x^2) & 2x^2+3x+1 \\ \cline{2-2}
 & 3x^2+7x & \\
 & -(3x^2+6x) & \\ \cline{2-2}
 & 1x+3 & \\
 & -(1x+2) & \\ \cline{2-2}
 & 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
2x^3+4x^2+0x+0 &= (2x^2+0x+0)\cdot(x+2) \\
3x^2+6x+0 &= (3x+0)\cdot(x+2) \\
1x+2 &= 1\cdot(x+2) \\
2x^3+7x^2+7x+1 &= (2x^2+3x+1)\cdot(x+2) \\
2x^3+7x^2+7x+3 &= (2x^2+3x+1)\cdot(x+2)+1
\end{aligned}
$$

Exercício 4.

Use estas idéias para integrar:

$$\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 3}{x + 2}\, dx \quad = \quad ?$$

Exercício 5.

O que acontece nos casos em que “teria vai um”?

a) Tente fazer a divisão com resto de x^3 por $x+2$.
Mais precisamente, encontre um polinômios $R(x)$ e $Q(x)$ tais que
$(x^3) = Q(x) \cdot (x+2) + R(x)$ e $R(x)$ é no máximo de grau 1.
Teste a sua resposta!

b) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ pelo método acima.
Teste a sua resposta derivando a sua antiderivada para $\frac{x^3}{x+2}$.

c) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ fazendo a substituição $u = x+2$.
Você deve obter o mesmo resultado que na (b).

d) Calcule $\int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}\,dx$ por frações parciais.

Dica importante

Lembre que uns dos meus slogans é
"eu só vou corrigir os sinais de igual"...
No slide 7 a igualdade mais importante é a da última linha.
Nós vamos usá-la assim, pra transformar a integral original em algo fácil de integrar:

$$\int \frac{2x^3+7x^2+7x+3}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x^2+3x+1)\cdot(x+2)+1}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x^2+3x+1)\cdot\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} + \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \int 2x^2+3x+1 + \frac{1}{x+2}\,dx$$

Uma questão da P1 do semestre passado

A questão 3 da P1 do semestre passado,

`http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-P1.pdf`

era de frações parciais, e eu pus nesse PDF um gabarito parcial dela, que não inclui nem as contas da divisão de polinômios nem a verificação de que a nossa integral está certa. Faça a questão, incluindo a parte que não está no gabarito.

Cálculo 2 - 2020.2

Aula ??: EDOs com variáveis separáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

Introdução

Seja $(*)$ a EDO abaixo:

$$f'(x) = 2x \qquad (*)$$

Ela tem muitas soluções. Por exemplo, $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^2 + 3$ são duas soluções diferentes dela.

Desenhando várias soluções dela num gráfico — veja o próximo slide — dá pra entender como é o conjunto de todas as soluções dela: ele é um conjunto de infinitas curvas disjuntas, que "cobrem o $\mathbb{R}^2$ todo", no sentido de que cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pertence a exatamente uma dessas curvas (ou: "soluções").

Por exemplo, o ponto $(2, 5)$ pertence à solução $f(x) = x^2 + 1$.

A "solução geral" da EDO $f'(x) = 2x$ é $f(x) = x^2 + C$; para obter soluções particulares substituimos esse C por números. Por exemplo, a solução de

$$f'(x) = 2x, \qquad f(2) = 5$$

é $f(x) = x^2 + 1$.

Campos de direções

Vamos agora considerar esta outra EDO:

$$f'(x) = -\frac{x}{y}$$

Nós ainda não sabemos quais são as soluções dela...
Mas existe um jeito simples de interpretar graficamente o que ela quer dizer. Para cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a fórmula $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ nos permite calcular o coeficiente angular no ponto (x, y) da solução que passa pelo ponto (x, y).
Por exemplo:

$(x,y)=(-2,2)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1$	$(x,y)=(-1,2)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1/2$	$(x,y)=(0,2)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=0$	$(x,y)=(1,2)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-1/2$	$(x,y)=(2,2)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-1$
$(x,y)=(-2,1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=2$	$(x,y)=(-1,1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1$	$(x,y)=(0,1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=0$	$(x,y)=(1,1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1$	$(x,y)=(2,1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-2$

Veja as figuras daqui:

http://angg.twu.net/2020.2-C2/thomas_secoes_15.1_ate_15.3.pdf

Os gráficos que usam tracinhos em certos pontos pra indicar coeficientes angulares naqueles pontos são gráficos de *campos de direções*.

Exercício 1.

Represente graficamente os campos de direções abaixo desenhando tracinhos com os coeficientes angulares adequados nos pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; ou seja, em cada item você vai ter que desenhar 25 tracinhos. Quando $\frac{dy}{dx} = \infty$ desenhe o tracinho na vertical.

a) $\frac{dy}{dx} = -1$

b) $\frac{dy}{dx} = x$

c) $\frac{dy}{dx} = 2x$

d) $\frac{dy}{dx} = -x/y$

e) $\frac{dy}{dx} = 1/y$

f) $\frac{dy}{dx} = 2/y$

g) $\frac{dy}{dx} = -y/x$

Exercício 2.

Tente imaginar o resto de cada um dos 7 campos de direções que você desenhou no exercício 1. Para cada um dos campos tente imaginar as curvas que você obteria se ligasse todos os tracinhos, e tente interpretar essas curvas como o conjunto de soluções da EDO que representamos graficamente como o campo de direções. Neste exercício você vai tentar encontrar soluções para EDOs no olhômetro a partir dos campos de direções delas.

Para cada uma das funções abaixo diga quais das 7 EDOs do exercício 1 podem ter aquela função como solução.

a) $y = x^2$
b) $y = \sqrt{x}$
c) $y = 1/x$
d) $y = \sqrt{1 - x^2}$

Na página seguinte temos o método geral para resolver EDOs com variáveis separáveis. Vou chamá-lo de [EDOVSG] pra podermos discutir como obter casos particulares dele usando a operação '[:=]', ao invés de termos que escrever coisas como "substituindo $f(x)$ por ___ acima obtemos...".

O método [EDOVGS] usa algumas gambiarras — veja o vídeo pra explicações.

$$[\mathsf{EDOVSG}] = \left(\begin{array}{ccl}
 & \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x)}{g(y)} & \\[2ex]
 & g(y)\,dy = f(x)\,dx & \\[2ex]
 & \int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx & \\
 & \quad \parallel \qquad\qquad\quad \parallel & \\
 & G(y)+C_1 \qquad F(x)+C_2 & \\[2ex]
 & G(y)+C_1 = F(x)+C_2 & \\
 & G(y) \qquad\;\; = F(x)+C_2-C_1 & \\
 & \qquad\qquad\;\; = F(x)+C_3 & \\[2ex]
 & G^{-1}(G(y)) = G^{-1}(F(x)+C_3) & \\
 & \parallel & \\
 & y &
\end{array} \right)$$

Digamos que queremos resolver esta EDO:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Aparentemente dá pra resolvê-la usando

$$[\mathsf{EDOVSG}] \begin{bmatrix} f(x) := -x \\ g(y) := y \end{bmatrix} \ ,$$

mas também precisamos das primitivas $F(x)$ e $G(y)$, e da inversa $G^{-1}(y)$... a substituição certa é:

$$[\mathsf{EDOVSG}] \begin{bmatrix} f(x) := -x \\ g(y) := y \\ F(x) := -\frac{x^2}{2} \\ G(y) := \frac{y^2}{2} \\ G^{-1}(z) := \sqrt{2z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\
y\,dy &= -x\,dx \\
\int y\,dy &= \int -x\,dx \\
\shortparallel\quad & \qquad \shortparallel \\
\frac{y^2}{2}+C_1 & \qquad -\frac{x^2}{2}+C_2
\end{aligned}$$

...que dá isto:

$$\begin{aligned}
\frac{y^2}{2}+C_1 &= -\frac{x^2}{2}+C_2 \\
\frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2}+C_2-C_1 \\
&= -\frac{x^2}{2}+C_3 \\
\sqrt{2\cdot\frac{y^2}{2}} &= \sqrt{2\cdot\left(-\frac{x^2}{2}+C_3\right)} \\
\shortparallel\quad & \qquad \shortparallel \\
y \quad & \qquad \sqrt{2C_3-x^2} \\
& \qquad \shortparallel \\
& \qquad \sqrt{C_4-x^2}
\end{aligned}$$

(As últimas linhas têm passos extras.)

Como testar uma solução
Digamos que estamos tentando resolver a EDO

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{x}{f(x)}, \qquad \text{ou:} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

e queremos ver se estas duas funções são solução dela:
$f_1(x) = x^2 + 3,\ f_2(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

Como testar uma solução (2)

Basta fazer:

$$\left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right) \begin{bmatrix} f(x) := x^2+3 \\ f'(x) = 2x \end{bmatrix} = \left(2x = -\frac{x}{x^2+3}\right)$$

$$\left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right) \begin{bmatrix} f(x) := \sqrt{25-x^2} \\ f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \end{bmatrix} = \left(\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\right)$$

e ver se as igualdades da direita são verdadeiras para todo x no domínio de cada função — aliás, nos pontos em que a função é derivável...

A função $f_1(x) = x^2$ está definida em todo $\mathbb{R}$ e é derivável em $\mathbb{R}$, e a função $f_2(x) = \sqrt{25-x^2}$ está definida no intervalo fechado $[-5,5]$ e é derivável no intervalo aberto $(-5,5)$.

Também dá pra testar soluções gerais, basta tratar os 'C's delas como constantes.

Exercício 3.
No exercício 1g você desenhou o campo de direções desta EDO:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \qquad (**)$$

e pelo campo de direções você deve ter conseguido ter uma noção de quais são as soluções dela... (dica: hipérboles!)

a) Resolva a EDO $(**)$ fazendo isto aqui:

$$[\mathsf{EDOVSG}] \begin{bmatrix} f(x) = -1/x \\ g(y) = 1/y \\ F(x) = \color{red}{?} \\ G(y) = \color{red}{?} \\ G^{-1}(y) = \color{red}{?} \end{bmatrix}$$

(Dica: preencha os '?'s corretamente)

Exercício 3.
b) Diga qual é a solução geral.
c) Teste a sua solução geral.
d) Obtenha a solução que passa pelo ponto $(2, 3)$.
e) Obtenha a solução que passa pelo ponto $(2, -2)$.

Funções inversas por chutar e testar
Digamos que

$$\begin{array}{rcl} y &=& 3+\sqrt{x+4}, \quad \text{isto é,} \\ f(x) &=& 3+\sqrt{x+4}, \end{array}$$

e sejam:

$$\begin{array}{rcl} g(y) &=& (y-3)^2+4, \\ h(y) &=& (y-4)^2+3. \end{array}$$

Eu acho difícil ver só fazendo contas de cabeça se $f^{-1}(y)=g(y)$ ou se $f^{-1}(y)=h(y)$... então é bom a gente saber testar se as inversas que a gente obteve de cabeça estão certas. O teste é:

$$\begin{array}{rcl} (f^{-1}(f(x))=x)\left[\begin{smallmatrix} f(x):=3+\sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y):=(y-3)^2+4 \end{smallmatrix}\right] &=& \color{red}{?} \\ (f^{-1}(f(x))=x)\left[\begin{smallmatrix} f(x):=3+\sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y):=(y-4)^2+3 \end{smallmatrix}\right] &=& \color{red}{?} \end{array}$$

Funções inversas por chutar e testar (2)

O modo tradicional de obter inversas é por uma série de passos, como:

$$\begin{array}{rcl}
f(x) & = & 3+\sqrt{x+4} \\
y & = & 3+\sqrt{x+4} \\
y-3 & = & \sqrt{x+4} \\
(y-3)^2 & = & x+4 \\
(y-3)^2-4 & = & x \\
(y-3)^2-4 & = & f^{-1}(y)
\end{array}$$

...mas é importante a gente saber testar se chegou na inversa certa.

Exercício 4.
Obtenha inversas para as seguintes funções:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 2+3\sqrt{5x+6} \\
f_2(x) &= 2+3\sqrt[4]{5x+6} \\
f_3(x) &= 2+3(4x+5)^6 \\
f_4(x) &= 2+3\ln(4x+5) \\
f_5(x) &= 2+3e^{4x+5} \\
f_6(x) &= \sqrt{2+3e^{4x+5}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_7(x) &= \ln x \\
f_8(x) &= \ln -x \\
f_9(x) &= |x| \\
f_{10}(x) &= \ln|x|
\end{aligned}$$

Porque é que $f_9^{-1}(x)$ e $f_{10}^{-1}(x)$ não existem?

Resolvendo “direto”

No segundo vídeo sobre esta parte da matéria – este aqui:

http://angg.twu.net/eev-videos/2020-2-C2-edovs-2.mp4

eu comecei mostrando como resolver a EDO

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

depois passei pro caso geral,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)},$$

e aí defini o “método” [EDOVSG]... e nos exercícios
que vieram depois disso nós usamos o [EDOVSG]
e a operação ‘[:=]’.

Exercício 5.
a) Tente resolver esta EDO "direto",
como no início do vídeo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

E pare quando você chegar neste ponto:

$$y^2 = x + C_4$$

O passo seguinte, se seguirmos o método do vídeo, é

$$y = \pm\sqrt{x + C_4}...$$

Exercício 5 (cont.)
Podemos considerar que temos duas soluções gerais:

$$\begin{array}{rcl} f_1(x) & = & +\sqrt{x+C_4}, \quad \text{e} \\ f_2(x) & = & -\sqrt{x+C_4}. \end{array}$$

b) Encontre o valor que C_4 que faz com que $f_1(2) = 3$.
c) Encontre o valor que C_4 que faz com que $f_2(4) = -5$.
d) Encontre a solução que passa pelo ponto $(-3, -4)$.

Cálculo 2 - 2020.2

P1 (primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

As regras e dicas são as mesmas dos mini-testes:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT1.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT2.pdf

exceto que a prova vai ser disponibilizada às 17:00 do dia 15/abril/2021 e deve ser entregue até as 20:00 do dia 16/abril/2021.

Questão 1

(Total: 2.5pts)

Sejam:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1, \\ 2 & \text{se } 1 < x, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1, \\ 2x & \text{se } 1 < x. \end{cases}$$

a) Desenhe os gráficos das funções $f(x)$ e $F(x)$.

b) É verdade que $F'(x) = f(x)$?

c) É verdade que F é uma primitiva de f?

d) É verdade que $\displaystyle\int_{x=0}^{x=2} f(x)\,dx = F(x)\big|_{x=0}^{x=2}$?

Questão 2

(Total: 2.5pts)

Toda integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variável (ou: "por uma sequência de integrações por substituição") pode ser resolvida por uma mudança de variável só. Vocês viram isso no mini-teste: a integral dele podia ser resolvida usando as duas mudanças de variável $[u = \sqrt{x}]$ e $[v = 2u + 3]$ ou usando só $[w = 2\sqrt{x} + 3]$.

Resolva a integral abaixo de dois jeitos diferentes:

$$\int \frac{3\cos\left(2 + \sqrt{3x+4}\right)}{2\sqrt{3x+4}}\, dx$$

a) por várias mudanças simples de variável,

b) por uma mudança de variável só.

Questão 3

(Total: 2.5pts)

Um dos exercícios dos slides de frações parciais pedia pra vocês integrarem $\int \frac{1}{3x}\,dx$. Tem dois jeitos de fazer essa conta, um começando com $\int \frac{1}{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,dx$ e outro começando com a substituição $[u = 3x]$, e os dois dão resultados diferentes. Faça as contas, entenda os detalhes, e explique o porquê desses dois resultados diferentes imaginando que você está explicando pra alguém que acabou de aprender integração por substituição mas ainda não tem muita prática.

Questão 4

(Total: 2.5pts)

Integre

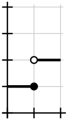
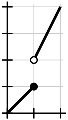
$$\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\, d\theta$$

e teste a sua resposta.

Dica: use um dos jeitos de integrar potências de senos e cossenos e depois use a regra da potência.

Gabarito
(incompleto)

Questão 1: gabarito

a) $f(x) =$  $F(x) =$ 

b) Isto é falso em $x = 1$: $f(1) = 1$ mas $F'(1)$ não existe.

c) Não. Veja a definição:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-escadas.pdf#page=16

d) Não: $3 = \displaystyle\int_{x=0}^{x=2} f(x)\,dx \neq F(x)\Big|_{x=0}^{x=2} = 4.$

Questão 2: gabarito

$$\begin{array}{ll}
\int \frac{3\cos\left(2+\sqrt{3x+4}\right)}{2\sqrt{3x+4}}\,dx & \left[\begin{array}{c} u=3x \\ \frac{du}{dx}=3 \\ du=3\,dx \\ dx=\frac{1}{3}\,du \end{array}\right] \\
= \int \frac{\cos\left(2+\sqrt{u+4}\right)}{2\sqrt{u+4}}\,du & \\
= \int \frac{\cos\left(2+\sqrt{v}\right)}{2\sqrt{v}}\,dv & \left[\begin{array}{c} v=u+4 \\ du=dv \end{array}\right] \\
= \int \cos\,(2+w)\,dw & \left[\begin{array}{c} w=\sqrt{v} \\ \frac{dw}{dv}=\frac{1}{2}v^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{v}} \end{array}\right] \\
= \int \cos y\,dy & \left[\begin{array}{c} y=2+w \\ dy=dw \end{array}\right] \\
= \operatorname{sen} y & \\
= \operatorname{sen}\,(2+w) & \\
= \operatorname{sen}\,(2+\sqrt{v}) & \\
= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{u+4}\right) & \\
= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{3x+4}\right) &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\int \frac{3\cos\left(2+\sqrt{3x+4}\right)}{2\sqrt{3x+4}}\,dx & \\
= \int \cos u\,du & \left[\begin{array}{c} u=2+\sqrt{3x+4} \\ \frac{du}{dx}=\frac{3}{2\sqrt{3x+4}} \end{array}\right] \\
= \operatorname{sen} u & \\
= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{3x+4}\right) &
\end{array}$$

Questão 3: gabarito

$$\begin{array}{l}\int \frac{1}{3x}\,dx \\ = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{3}\,du \\ = \frac{1}{3}\int\frac{1}{u}\,du \\ = \frac{1}{3}\ln u \\ = \frac{1}{3}\ln(3x)\end{array} \quad \begin{bmatrix} u = 3x \\ x = \frac{1}{3}u \\ dx = \frac{1}{3}du \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}\int \frac{1}{3x}\,dx \\ = \frac{1}{3}\int\frac{1}{x}\,dx \\ = \frac{1}{3}\ln x\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\frac{1}{3}\ln(3x) \\ = \frac{1}{3}((\ln 3) + (\ln x)) \\ = (\frac{1}{3}\ln 3) + (\frac{1}{3}\ln x)\end{array}$$

As duas integrais que obtivemos para $\frac{1}{3x}$ diferem por uma constante.

Questão 4: gabarito

$$\int \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\,d\theta =$$

$$\left[\begin{array}{l} c = \cos\theta \\ \frac{dc}{d\theta} = -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta\,d\theta = (-1)\,dc \end{array}\right]$$

$$\int \frac{1}{\cos\theta}\,\text{sen}\,\theta\,d\theta =$$

$$\int \frac{1}{c}(-1)\,dc =$$

$$-\int \frac{1}{c}\,dc =$$

$$-\ln|c| =$$

$$-\ln|\cos\theta|$$

$$\int \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\,d\theta =$$

$$\left[\begin{array}{l} s = \text{sen}\,\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \end{array}\right.$$

$$\cos\theta\,d\theta = ds$$

$$\int \frac{\text{sen}\,\theta}{(\cos\theta)^2}\cos\theta\,d\theta =$$

$$\int \frac{\text{sen}\,\theta}{1-(\text{sen}\,\theta)^2}\cos\theta\,d\theta =$$

$$\int \frac{s}{1-s^2}\,ds = \quad \ldots \quad$$:(

Cálculo 2 - 2020.2

Aula ??: Identidades trigonométricas

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

Nos slides sobre Frações Parciais nós vimos que contas com polinômios são parecidas com contas com números “sem vai um”...

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 2 & 3 & 1 \\
\times & & & 1 & 2 \\ \cline{3-5}
 & & & 1 & 2 \\
 & & 3 & 6 & \\
 & 2 & 4 & & \\ \hline
 & 2 & 7 & 7 & 2
\end{array}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{array}{cccccc}
 & & 2x^2 & +3x & +1 \\
\times & & & x & +2 \\ \cline{3-5}
 & & & x & +2 \\
 & & 3x^2 & +6x & \\
 & 2x^3 & +4x^2 & & \\ \hline
 & 2x^3 & +7x^2 & +7x & +2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc|ccc}
 & 2 & 7 & 7 & 3 & & 1 & 2 \\ \cline{6-8}
- & 2 & 4 & & & 2 & 3 & 1 \\ \cline{2-3}
 & & 3 & 7 & & & & \\
 & - & 3 & 6 & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 1 & 3 & & & \\
 & & - & 1 & 2 & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 1 & & &
\end{array}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{array}{rcccc|ccc}
 & 2x^3 & +7x^2 & +7x & +3 & & x & +2 \\ \cline{6-8}
- & (2x^3 & +4x^2) & & & 2x^2 & +3x & +1 \\ \cline{2-3}
 & & 3x^2 & +7x & & & & \\
 & - & (3x^2 & +6x) & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & x & +3 & & & \\
 & & - & (x & +2) & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 1 & & &
\end{array}$$

Cálculo 2 - 2020.2

P2 (segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.2-C2.html

As regras e dicas são as mesmas dos mini-testes e da P1:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT1.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT2.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf

exceto que a prova vai ser disponibilizada às 21:00 do dia 29/abril/2021 e deve ser entregue até as 22:00 do dia 30/abril/2021.

Questão 1.
(Total: 6.5+1.5 pts)

Na parte do curso sobre substituição trigonométrica — link:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-subst-trig.pdf

você aprendeu a demonstrar fórmulas de integração, a dar nomes pra elas, a criar uma "tabela de integrais" sua só com fórmulas que você sabe demonstrar, e a usar as fórmulas da sua tabela de integrais. Agora você vai demonstrar duas fórmulas sobre substituição trigonométrica que não vimos nas aulas e que vão ser usadas algumas vezes nos cursos de Física.

Lembre que várias fórmulas de integração importantes não resolvem integrais, só convertem elas pra integrais mais fáceis de resolver. Várias fórmulas do slides de substituição trigonométrica são assim, e as que você vai demonstrar aqui também vão ser.

Questão 1 (cont.)

a) **(2.0 pts)** Demonstre uma fórmula como esta aqui,

$$\int x^\alpha \sqrt{a^2x^2 - 1}^\beta \, dx = k \int u^\alpha \sqrt{u^2 - 1}^\beta \, du$$

e dê um nome para ela. Você vai ter que descobrir qual é a substituição certa e qual é o valor da expressão k. Obs: $a > 0$.

b) **(2.0 pts)** Demonstre uma fórmula como esta aqui,

$$\int x^\alpha \sqrt{x^2 - b^2}^\beta \, dx = w \int u^\alpha \sqrt{u^2 - 1}^\beta \, du$$

e dê um nome para ela. Você vai ter que descobrir qual é a substituição certa e qual é o valor da expressão w. Obs: $b > 0$.

Questão 1 (cont.)

c) **(2.5 pts)** Demonstre uma fórmula como esta aqui,

$$\int x^\alpha \sqrt{a^2x^2 - b^2}^\beta \, dx = z \int u^\alpha \sqrt{u^2 - 1}^\beta \, du$$

e dê um nome para ela. Você vai ter que descobrir qual é a substituição certa e qual é o valor da expressão z.
Obs: $a, b > 0$.

Dicas pra questão 1

Tente generalizar isto aqui,

$$\sqrt{x^2 - 25} = \sqrt{25\left(\left(\frac{x}{5}\right)^2 - 1\right)} = 5\sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^2 - 1}\,,$$

e se você precisar de mais idéias veja o gabarito da questão 2 aqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2018-2-C2-P1.pdf

e a "Aula 7" das notas da Cristiane Hernández.

Além disso dê nomes para as suas fórmulas! Se você souber usar a fórmula do item (a) pra demonstrar o item (b) e as fórmulas dos itens (a) e (b) pra demonstrar o (c) as suas demonstrações podem ficar bem curtas.

Mais dicas para a questão 1

Se você achar difícil demais resolver os itens (a), (b) e (c) direto no caso geral, em que $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ e $a, b > 0$, comece com um caso particular bem simples — por exemplo $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $a = b = 5$ — depois tente outro caso particular simples, depois outro, até você conseguir o caso geral.

Veja a figura da próxima página...

...e repare que passar do caso geral para um caso particular é fácil — é só fazer uma substituição, ou deletar passos intermediários — mas encontrar o caso geral que generaliza vários casos particulares conhecidos é difícil.

(Ir pra baixo na figura é fácil, ir pra cima é difícil)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
& \left(\begin{array}{rcl}
2^{k+1}-2^k & = & 2^{1+k}-2^k \\
& = & 2^1\cdot 2^k - 2^0\cdot 2^k \\
& = & 2\cdot 2^k - 1\cdot 2^k \\
& = & (2-1)\cdot 2^k \\
& = & 1\cdot 2^k \\
& = & 2^k
\end{array}\right) \arrow[dl, "{[k{:=}4]}"'] \arrow[dr, "{[k{:=}99]}"] & \\
\left(\begin{array}{rcl}
2^{4+1}-2^4 & = & 2^{1+4}-2^4 \\
& = & 2^1\cdot 2^4 - 2^0\cdot 2^4 \\
& = & 2\cdot 2^4 - 1\cdot 2^4 \\
& = & (2-1)\cdot 2^4 \\
& = & 1\cdot 2^4 \\
& = & 2^4
\end{array}\right) \arrow[d] & & \left(\begin{array}{rcl}
2^{99+1}-2^{99} & = & 2^{1+99}-2^{99} \\
& = & 2^1\cdot 2^{99} - 2^0\cdot 2^{99} \\
& = & 2\cdot 2^{99} - 1\cdot 2^{99} \\
& = & (2-1)\cdot 2^{99} \\
& = & 1\cdot 2^{99} \\
& = & 2^{99}
\end{array}\right) \arrow[d] \\
\left(\ 2^5-2^4 \ = \ 2^4\ \right) & & \left(\ 2^{100}-2^{99} \ = \ 2^{99}\ \right)
\end{tikzcd}
$$

Questão 1: itens extras
(Acrescentados depois, a pedido dos alunos)
Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
\text{[P2.1a]} & = & \left(\int x^\alpha \sqrt{a^2x^2-1}^\beta\,dx = k\int u^\alpha \sqrt{u^2-1}^\beta\,du\right) \\
\text{[P2.1b]} & = & \left(\int x^\alpha \sqrt{x^2-b^2}^\beta\,dx = w\int u^\alpha \sqrt{u^2-1}^\beta\,du\right) \\
\text{[P2.1c]} & = & \left(\int x^\alpha \sqrt{a^2x^2-b^2}^\beta\,dx = z\int u^\alpha \sqrt{u^2-1}^\beta\,du\right)
\end{array}$$

Escreva o resultado das substituições abaixo:

d) **(0.1 pts)** [P2.1a] $\begin{bmatrix} \alpha:=0 \\ \beta:=1 \\ a:=3 \end{bmatrix}$

e) **(0.1 pts)** [P2.1b] $\begin{bmatrix} \alpha:=0 \\ \beta:=1 \\ b:=5 \end{bmatrix}$

f) **(0.1 pts)** [P2.1c] $\begin{bmatrix} \alpha:=0 \\ \beta:=1 \\ a:=2 \\ b:=4 \end{bmatrix}$

Questão 1: itens extras (cont.)
Nos itens (d), (e) e (f) do slide anterior você deve ter obtido três igualdades novas. Vamos dar nomes pra elas. Sejam:

$$\begin{aligned}
[\mathsf{P2.1d}] &:= [\mathsf{P2.1a}]\begin{bmatrix} \alpha:=0 \\ \beta:=1 \\ a:=3 \end{bmatrix} \\
[\mathsf{P2.1e}] &:= [\mathsf{P2.1b}]\begin{bmatrix} \alpha:=0 \\ \beta:=1 \\ b:=5 \end{bmatrix} \\
[\mathsf{P2.1f}] &:= [\mathsf{P2.1c}]\begin{bmatrix} \alpha:=0 \\ \beta:=1 \\ a:=2 \\ b:=4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Questão 1: itens extras (cont.)

g) **(0.2 pts)** Encontre uma mudança de variável — algo como, por exemplo, $\left[\begin{smallmatrix} u=42x \\ dx=\frac{1}{42}du \end{smallmatrix}\right]$ — e um valor para k que façam a igualdade [P2.1d] ser verdade.

Agora faça a mesma coisa para as igualdades [P2.1e] e [P2.1f]:

h) **(0.2 pts)** Encontre uma mudança de variável e um valor para w que façam a igualdade [P2.1e] ser verdade.

i) **(0.2 pts)** Encontre uma mudança de variável e um valor para z que façam a igualdade [P2.1f] ser verdade.

Questão 1: itens extras (cont.)

Se você tiver conseguido resolver os itens (1g), (1h) e (1i) você conseguiu resolver alguns casos particulares dos itens (1a), (1b) e (1c)! Vamos fazer mais casos particulares...

A partir de agora ao invés de escrever "Encontre a mudança de variável e o valor de k (ou w, ou z...) que façam a igualdade [Tal] ser verdade" eu vou escrever só "Resolva [Tal]".

j) **(0.2 pts)** Resolva [P2.1a] $\left[\begin{smallmatrix} \alpha:=0 \\ \beta:=3 \end{smallmatrix}\right]$.

k) **(0.2 pts)** Resolva [P2.1b] $\left[\begin{smallmatrix} \alpha:=0 \\ \beta:=3 \end{smallmatrix}\right]$.

l) **(0.2 pts)** Resolva [P2.1c] $\left[\begin{smallmatrix} \alpha:=0 \\ \beta:=3 \end{smallmatrix}\right]$.

Questão 1: itens extras (cont.)
Se você tiver conseguido resolver os itens anteriores você deve ser capaz de resolver estes aqui...

Resolva [P2.1a] $\left[\alpha := 0\right]$,

Resolva [P2.1b] $\left[\alpha := 0\right]$,

Resolva [P2.1c] $\left[\alpha := 0\right]$.

...e com isso você deve conseguir resolver os itens (1a), (1b) e (1c) — que valem muitos pontos.

Questão 2.
(Total: 6.0 pts)

Obs: esta questão é bem parecida com os exercícios daqui:
`http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-edovs.pdf`

Considere esta EDO, que vamos chamar de "$(*)$":

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y}$$

a) **(0.5 pts)** Desenhe o campo de direções da $(*)$.
Faça tracinhos nos pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

b) **(1.0 pts)** "Resolva direto" a EDO $(*)$, como no exercício 5 dos slides.

Questão 2 (cont.)

c) **(1.0 pts)** Descubra qual é a solução da $(*)$ que passa pelo ponto $(0,2)$, e chame-a de $f_1(x)$. Desenhe o gráfico da função $f_1(x)$ e diga o domínio dela.

d) **(1.0 pts)** Teste a sua solução $f_1(x)$ — ou seja: verifique que ela é uma solução de $(*)$ e que ela passa pelo ponto $(0,2)$.

e) **(1.5 pts)** Descubra qual é a solução da $(*)$ que passa pelo ponto $(1,-2)$, e chame-a de $f_2(x)$. Desenhe o gráfico da função $f_2(x)$ e diga o domínio dela.

f) **(1.0 pts)** Teste a sua solução $f_2(x)$ — ou seja: verifique que ela é uma solução de $(*)$ e que ela passa pelo ponto $(1,-2)$.

Gabarito

(incompleto)

1a) Queremos:

$$\int x^\alpha \sqrt{a^2x^2-1}^{\,\beta}\,dx$$

$$= K\int u^\alpha \sqrt{u^2-1}^{\,\beta}\,du$$

Temos:

$$\int x^\alpha \sqrt{a^2x^2-1}^{\,\beta}\,dx \qquad \left[\begin{array}{l} u = ax \\ \frac{1}{a}u = x \\ \frac{1}{a}du = dx \end{array}\right]$$

$$= \int \left(\frac{u}{a}\right)^\alpha \sqrt{u^2-1}^{\,\beta} \cdot \frac{1}{a}\,du$$

$$= \frac{1}{a^{\alpha+1}} \int u^\alpha \sqrt{u^2-1}^{\,\beta}\,du$$

Então:

$$[1A] = \left(\begin{array}{ll} \int x^\alpha \sqrt{a^2x^2-1}^{\,\beta}\,dx & [u=ax] \\ = \frac{1}{a^{\alpha+1}} \int u^\alpha \sqrt{u^2-1}^{\,\beta}\,du & \end{array} \right)$$

1b) QUEREMOS:

$$\int x^\alpha \sqrt{x^2-b^2}^{\,\beta} dx$$
$$= w \int u^\alpha \sqrt{u^2-1}^{\,\beta} du$$

TEMOS:

$$\int x^\alpha \sqrt{x^2-b^2}^{\,\beta} dx$$
$$= \int x^\alpha \sqrt{b^2\left(\left(\frac{x}{b}\right)^2-1\right)}^{\,\beta} dx$$
$$= \int x^\alpha \left(b\sqrt{\left(\frac{x}{b}\right)^2-1}\right)^{\beta} dx$$
$$= b^\beta \int x^\alpha \sqrt{\left(\frac{x}{b}\right)^2-1}^{\,\beta} dx \qquad \left[\begin{array}{l} u = \frac{x}{b} \\ bu = x \\ b\,du = dx \end{array}\right]$$
$$= b^\beta \int (bu)^\alpha \sqrt{u^2-1}^{\,\beta} b\, du$$
$$= b^\beta \cdot b^\alpha \cdot b \int u^\alpha \sqrt{u^2-1}^{\,\beta} du$$

ENTÃO:

$$[1B] = \left(\begin{array}{ll} \int x^\alpha \sqrt{x^2-b^2}^{\,\beta} dx & \left[u = \frac{x}{b}\right] \\ = b^{\alpha+\beta+1} \int u^\alpha \sqrt{u^2-1}^{\,\beta} du & \end{array}\right)$$

1c) QUEREMOS:

$$\int x^{\alpha}\sqrt{a^2x^2-b^2}\,dx$$
$$= z\int u^{\alpha}\sqrt{u^2-1}\,du$$

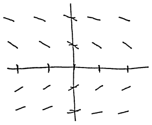
TEMOS:

$$\int x^{\alpha}\sqrt{a^2x^2-b^2}^{\,\beta}dx$$
$$= \int x^{\alpha}\left(b\sqrt{\frac{a^2x^2}{b^2}-1}\right)^{\beta}dx$$
$$= b^{\beta}\int x^{\alpha}\sqrt{\left(\frac{a}{b}x\right)^2-1}^{\,\beta}dx$$
$$= b^{\beta}\int\left(\frac{b}{a}u\right)^{\alpha}\sqrt{u^2-1}^{\,\beta}\cdot\frac{b}{a}\,du$$
$$= b^{\beta}\frac{b^{\alpha}}{a^{\alpha}}\frac{b}{a}\int u^{\alpha}\sqrt{u^2-1}^{\,\beta}du$$

$$\left[\begin{array}{l} u=\frac{a}{b}x \\ \frac{b}{a}u=x \\ \frac{b}{a}du=dx \end{array}\right]$$

ENTÃO:

$$[1C] = \left(\begin{array}{l} \displaystyle\int x^{\alpha}\sqrt{a^2x^2-b^2}\,dx \qquad \left[u=\frac{a}{b}x\right] \\ \displaystyle= \frac{b^{\alpha+\beta+1}}{a^{\alpha+1}}\int u^{\alpha}\sqrt{u^2-1}^{\,\beta}du \end{array}\right)$$

2a) 

2b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y}$

$2y\,dy = -dx$

$\int 2y\,dy = \int -1\,dx$

$\quad \shortparallel \qquad\qquad \shortparallel$

$y^2 + C_1 \qquad -x + C_2$

$y^2 = -x + C_2 - C_1$

$\quad = -x + C_3$

$y = \pm\sqrt{-x + C_3}$

2c) $(x,y) = (0,2)$

$2 = \pm\sqrt{-0 + C_3}$

$\Rightarrow 2 = \sqrt{-0 + C_3}$

$\quad = \sqrt{4}$

$\Rightarrow C_3 = 4$

$\Rightarrow f_1(x) = \sqrt{-x+4}$

2d) $\frac{d}{dx} f_1(x) =$

$\frac{d}{dx}\sqrt{-x+4} =$

$\frac{-1}{2\sqrt{-x+4}}$

$\frac{dy}{dx} \stackrel{?}{=} -\frac{1}{2y}$

$\quad \shortparallel \qquad\qquad \shortparallel$

$\frac{d}{dx} f_1(x) \qquad -\frac{1}{2f_1(x)}$

$\quad \shortparallel \qquad\qquad \shortparallel$

$\frac{-1}{2\sqrt{-x+4}} \qquad -\frac{1}{2\sqrt{-x+4}}$

OU SEJA, $f_1(x)$ É SOLUÇÃO DA EDO (*).

$(x,y) = (0,2)$

$f_1(x) \stackrel{?}{=} y$

$\quad \shortparallel \qquad \shortparallel$

$f_1(0) \qquad 2$

$\quad \shortparallel$

$\sqrt{-0+4}$

$\quad \shortparallel$

$\quad 2$

OU SEJA, $f_1(x)$ PASSA PELO PONTO $(0,2)$.

2e) $(x,y)=(1,-2)$

$$y = \pm\sqrt{-x+C_3}$$

$$-2 = \pm\sqrt{-1+C_3}$$

$$-2 = -\sqrt{-1+C_3}$$

$$2 = \sqrt{-1+C_3}$$

$$4 = -1+C_3$$

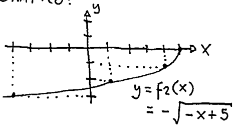
$$C_3 = 5$$

$$y = -\sqrt{-x+5}$$

$$f_2(x) = -\sqrt{-x+5}$$

$f_2(x)$ ESTÁ DEFINIDA QUANDO $-x+5 \geq 0$, OU SEJA, QUANDO $5 \geq x$, OU SEJA, PARA $x \in (-\infty, 5]$.

GRÁFICO:



2f) $\frac{d}{dx} f_2(x) = \frac{d}{dx}\left(-\sqrt{-x+5}\right) = -\frac{d}{dx}\sqrt{-x+5} = -\frac{-1}{2\sqrt{-x+5}} = \frac{1}{2\sqrt{-x+5}}$

$$\frac{dy}{dx} \overset{?}{=} -\frac{1}{2y}$$

$$\frac{d}{dx}f_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x+5}}$$

$$-\frac{1}{2y} = -\frac{1}{2f(x)} = -\frac{1}{2(-\sqrt{-x+5})} = \frac{1}{2\sqrt{-x+5}}$$

OU SEJA, $f_2(x)$ É SOLUÇÃO DA EDO (*).

$(x,y)=(1,-2)$

$$f_2(x) \overset{?}{=} y$$

$$f_2(x) = -\sqrt{-x+5} = -\sqrt{-1+5} = -\sqrt{4} = -2, \quad y = -2$$

OU SEJA, $f_2(1) = -2$.