Cálculo 2 - 2021.1

P2 (segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C2.html

As regras e dicas são as mesmas dos mini-testes:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT1.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT2.pdf

exceto que a prova vai ser disponibilizada às 21:20 do dia 16/setembro/2021 e deve ser entregue até as 21:20 do dia 18/setembro/2021.

Avisos

Durante a duração da prova eu (praticamente só) vou responder perguntas sobre a prova que 1) sejam feitas nos canais das turmas no Telegram e que 2) possam ser respondidas com links pros slides, vídeos e livros que usamos durante o curso ou com links pros logs das aulas.

Durante a prova eu vou deixar os logs das aulas disponíveis aqui:

http://angg.twu.net/tmp/C2-C1-RCN-PURO-2021.1.pdf
http://angg.twu.net/tmp/C2-C1-RCN-PURO-2021.1-2.pdf
http://angg.twu.net/tmp/C2-C1-RCN-PURO-2021.1-3.pdf

http://angg.twu.net/tmp/C2-E1-RCN-PURO-2021.1.pdf
http://angg.twu.net/tmp/C2-E1-RCN-PURO-2021.1-2.pdf
http://angg.twu.net/tmp/C2-E1-RCN-PURO-2021.1-3.pdf
http://angg.twu.net/tmp/C2-E1-RCN-PURO-2021.1-4.pdf
http://angg.twu.net/tmp/C2-E1-RCN-PURO-2021.1-5.pdf

Vou tirar esses logs do meu site logo depois do fim da prova.

Vamos usar muita coisa daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-edovs.pdf
Em particular:

$$
[\mathsf{EDOVSG1}] \quad = \quad
\left(\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{f(x)}{g(y)} \\
g(y)\,dy & = & f(x)\,dx \\
\int g(y)\,dy & = & \int f(x)\,dx \\
\| \quad & & \quad \| \\
G(y)+C_1 & & F(x)+C_2 \\
G(y)+C_1 & = & F(x)+C_2 \\
G(y) & = & F(x)+C_2-C_1 \\
& = & F(x)+C_3 \\
G^{-1}(G(y)) & = & G^{-1}(F(x)+C_3) \\
\| \quad & & \\
y \quad & &
\end{array}\right)
\quad
\left(\begin{array}{ccc}
\square & \overset{(1)}{=} & \square \\
\square & \overset{(2)}{=} & \square \\
\int\square & \overset{(3)}{=} & \int\square \\
\|(4) & & \|(5) \\
\square & & \square \\
\square & \overset{(6)}{=} & \square \\
\square & \overset{(7)}{=} & \square \\
& \overset{(8)}{=} & \square \\
\square & \overset{(9)}{=} & \square \\
(10)\| & & \\
\square & &
\end{array}\right)
$$

$$
[\mathsf{EDOVSG2}] \quad = \quad
\left(\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{f(x)}{g(y)} \\
y & = & G^{-1}(F(x)+C_3)
\end{array}\right)
$$

Questão 1.
(Total: 5.0 pts)

a) **(2.0 pts)** Escreva o resultado da substituição

$$[\mathsf{EDOVSG1}] \begin{bmatrix} f(x) := 2x+3 \\ F(x) := x^2+3x \\ g(y) := y^4 \\ G(y) := y^5+2 \\ G^{-1}(x) := \sqrt[5]{x-2} \end{bmatrix}$$

e escreva "$= [\mathsf{Q1}]$" à direita do seu resultado
pra indicar que nós vamos usar a expressão $[\mathsf{Q1}]$
pra nos referir a essa expressãozona.

Dicas:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-edovs.pdf#page=24
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-subst.pdf#page=9

Questão 1 (cont.)

Aqui vou usar '(1)', '(2)', ..., '(10)' pra me referir às igualdades da expressãozona [Q1] que você definiu no item a.

b) **(1.0 pts)** Mostre que $y = \operatorname{sen} x$ não é uma solução da EDO (1).

c) **(0.5 pts)** Mostre que (4) é falsa.

d) **(0.5 pts)** Mostre que (5) é verdadeira.

e) **(0.5 pts)** Digamos que $x = -2$, $y = 1$, $C_1 = 10$.
Encontre o único valor de C_2 que faz a (6) ser verdadeira.

f) **(0.5 pts)** Mostre que a (10) é verdadeira.

Questão 2.
(Total: 6.0 pts)

Seja $(*)$ esta EDO daqui:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

a) **(1.0 pts)** Desenhe o campo de direções dela. Obs: Faça tracinhos nos pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

b) **(1.0 pts)** Encontre a solução geral dela e teste-a.

c) **(1.0 pts)** Encontre a solução da $(*)$ que passa pelo ponto $(3, 2)$. Diga qual é o domínio dela e teste-a.

d) **(1.0 pts)** Encontre a solução da $(*)$ que passa pelo ponto $(-1, -3)$. Diga qual é o domínio dela e teste-a.

Questão 2 (cont.)

e) **(0.0 pts)** Agora defina, usando a sintaxe certa, as funções $f_b(x)$, $f_c(x)$, $f_d(x)$ que correspondem às funções que você obteve nos itens b, c e d. Este item vale 0 pontos mas se você errar ele todos os próximos itens desta questão vão ser anulados.

MUITO IMPORTANTE: aqui a sua resposta **TEM QUE** começar com um “sejam” — se você não escrever o “sejam” eu vou considerar que a sua resposta está errada.

Obs: na definição da sua $f_b(x)$ você pode usar ‘$\pm$’, mas nas outros não.

Questão 2 (cont.)

f) **(1.0 pts)** Descubra qual é a substituição da forma

$$[\mathsf{EDOVSG2}] \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ F(x) := ? \\ g(y) := ? \\ G(y) := ? \\ G^{-1}(x) := ? \\ C_3 := ? \end{bmatrix}$$

que resolve a EDO $(*)$ e dá a sua solução $y = f_c(x)$. Escreva ela por extenso como você fez no item 1a — mas note que agora estamos usando a [EDOVSG2].

g) **(1.0 pts)** Faça a mesma coisa para a $y = f_d(x)$.

Gabarito

Questão 1a

$$
\begin{pmatrix}
\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{f(x)}{g(y)} \\
g(y)\,dy & = & f(x)\,dx \\
\int g(y)\,dy & = & \int f(x)\,dx \\
\Vert & & \Vert \\
G(y)+C_1 & & F(x)+C_2 \\
G(y)+C_1 & = & F(x)+C_2 \\
G(y) & = & F(x)+C_2-C_1 \\
 & = & F(x)+C_3 \\
G^{-1}(G(y)) & = & G^{-1}(F(x)+C_3) \\
\Vert & & \\
y & &
\end{array}
\end{pmatrix}
\begin{bmatrix}
f(x) := 2x+3 \\
F(x) := x^2+3x \\
g(y) := y^4 \\
G(y) := y^5+2 \\
G^{-1}(x) := \sqrt[5]{x-2}
\end{bmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{2x+3}{y^4} \\
y^4\,dy & = & (2x+3)\,dx \\
\int y^4\,dy & = & \int 2x+3\,dx \\
\Vert & & \Vert \\
y^5+2+C_1 & & x^2+3x+C_2 \\
y^5+2+C_1 & = & x^2+3x+C_2 \\
y^5+2 & = & x^2+3x+C_2-C_1 \\
 & = & x^2+3x+C_3 \\
\sqrt[5]{(y^5+2)-2} & = & \sqrt[5]{(x^2+3x+C_3)-2} \\
\Vert & & \\
y & &
\end{array}
\end{pmatrix}
= [\mathsf{Q1}]
$$

Questões 1b e 1c

1b)

$$\begin{array}{rcl}
y & = & \operatorname{sen} x \\
f(x) & = & \operatorname{sen} x \\
\frac{dy}{dx} & \stackrel{?}{=} & \frac{2x+3}{y^4} \\
\| & & \| \\
\frac{d}{dx}f(x) & & \frac{2x+3}{(\operatorname{sen} x)^4} \\
\| & & \\
\cos x & & \\
\cos x & \neq & \frac{2x+3}{(\operatorname{sen} x)^4}
\end{array}$$

1c)

$$\begin{array}{rcl}
\int y^4\,dy & \stackrel{?}{=} & y^5+2+C_1 \\
y^4 & \stackrel{?}{=} & \frac{d}{dy}(y^5+2+C_1) \\
 & = & 5y^4 \\
y^4 & \neq & 5y^4 \\
\int y^4\,dy & \neq & y^5+2+C_1
\end{array}$$

Questões 1d até 1f

1d)

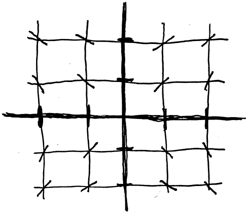
$$\begin{array}{rcl}
\int 2x+3\,dx & \stackrel{?}{=} & x^2+3x+C_2 \\
2x+3 & \stackrel{?}{=} & \frac{d}{dx}(x^2+3x+C_2) \\
 & = & 2x+3 \\
\int 2x+3\,dx & = & x^2+3x+C_2
\end{array}$$

1e) A igualdade (6) é $y^5+2+C_1 = x^2+3x+C_2$.
Se $x=-2$, $y=1$, $C_1=10$, podemos reescrevê-la
como: $1^5+2+10 = (-2)^2+3(-2)+C_2$; e aí
$C_2 = 1^5+2+10-((-2)^2+3(-2)) = 13-(-2) = 15$.

1f)

$$\begin{array}{rcl}
y & \stackrel{?}{=} & \sqrt[5]{(y^5+2)-2} \\
 & = & \sqrt[5]{y^5} \\
 & = & y
\end{array}$$

Questões 2a e 2b

2a) 

2b)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$y\,dy = x\,dx$$

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ \frac{1}{2}y^2 + C_1 & & \frac{1}{2}x^2 + C_2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}y^2 &= \frac{1}{2}x^2 + C_2 - C_1 \\ &= \frac{1}{2}x^2 + C_3 \\ y^2 &= x^2 + C_4 \\ y &= \pm\sqrt{x^2 + C_4} \end{aligned}$$

(Falta o teste da 2b)

Questões 2c e 2d

2c)

$$
\begin{aligned}
(x,y) &= (3,2)\\
y &= \pm\sqrt{x^2+C_4}\\
2 &= \pm\sqrt{3^2+C_4}\\
2 &= \sqrt{9+C_4}\\
4 &= 9+C_4\\
4-9 &= C_4\\
C_4 &= -5\\
y &= \sqrt{x^2-5}
\end{aligned}
$$

Domínio:

$$
\begin{aligned}
&\{\, x\in\mathbb{R} \mid x^2-5\geq 0 \,\}\\
&= \{\, x\in\mathbb{R} \mid x^2\geq 5 \,\}\\
&= \{\, x\in\mathbb{R} \mid |x|\geq \sqrt{5} \,\}\\
&= (-\infty,\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5},+\infty)
\end{aligned}
$$

(Falta o teste)

2d)

$$
\begin{aligned}
(x,y) &= (-1,-3)\\
y &= \pm\sqrt{x^2+C_4}\\
-3 &= \pm\sqrt{(-1)^2+C_4}\\
-3 &= -\sqrt{1+C_4}\\
3 &= \sqrt{1+C_4}\\
3^2 &= 1+C_4\\
C_4 &= 3^2-1 = 8\\
y &= -\sqrt{x^2+8}
\end{aligned}
$$

Domínio:

$$
\begin{aligned}
&\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+8\geq 0\}\\
&=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2\geq -8\}\\
&=\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Teste:

$$
\begin{aligned}
y &= -\sqrt{x^2+8}\\
(-3) &\overset{?}{=} -\sqrt{(-1)^2+8}\\
&= -\sqrt{1+8}\\
&= -3
\end{aligned}
$$

Questão 2e

2e) Sejam:
$$\begin{array}{rcl} f_b(x) & = & \pm\sqrt{x^2 + C_4}, \\ f_c(x) & = & \sqrt{x^2 - 5}, \\ f_d(x) & = & -\sqrt{x^2 + 8}. \end{array}$$

Truque pra 2f e pra 2g:
Lembre que na 2b nós fizemos essa passagem aqui:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}y^2 & = & \frac{1}{2}x^2 + C_3 \\ y^2 & = & x^2 + C_4 \end{array}$$

Nela ficava implícito que $2C_3 = C_4$.

2f) Para $f_b(x) = \pm\sqrt{x^2 + C^4}$:

$$\left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} &=& \frac{f(x)}{g(y)} \\ y &=& G^{-1}(F(x)+C_3) \end{array}\right) \begin{bmatrix} f(x) := x \\ F(x) := \frac{1}{2}x^2 \\ g(y) := y \\ G(y) := \frac{1}{2}y^2 \\ G^{-1}(x) := \pm\sqrt{2x} \\ C_3 := \frac{1}{2}C_4 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} &=& \frac{x}{y} \\ y &=& \pm\sqrt{2(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}C_4)} \end{array}\right)$$

2g) Para $f_c(x) = \sqrt{x^2 - 5}$:

$$\left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} &=& \frac{f(x)}{g(y)} \\ y &=& G^{-1}(F(x)+C_3) \end{array}\right) \begin{bmatrix} f(x) := x \\ F(x) := \frac{1}{2}x^2 \\ g(y) := y \\ G(y) := \frac{1}{2}y^2 \\ G^{-1}(x) := \sqrt{2x} \\ C_3 := -\frac{5}{2} \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} &=& \frac{x}{y} \\ y &=& \sqrt{2(\frac{1}{2}x^2 + (-\frac{5}{2}))} \end{array}\right)$$