Cálculo 2 - 2021.1

Aula 23: como contas de integração costumam ser organizadas

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2021.1-C2.html

Exemplo 1.

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C2-contas-em-C2.mp4
(Ele está explicado neste ↑ vídeo! Assista!)

Temos:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) & = & f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \\
f(x)g(x) & = & \int f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\,dx \\
 & = & \int f'(x)g(x)\,dx+\int f(x)g'(x)\,dx
\end{array}$$

Então:

$$\begin{array}{rcl}
\int f'(x)g(x)\,dx+\int f(x)g'(x)\,dx & = & f(x)g(x) \\
\int f(x)g'(x)\,dx & = & f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx \\
\int f'(x)g(x)\,dx & = & f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx
\end{array}$$

Sejam:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{IP1.} & \int f(x)g'(x)\,dx & = & f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \\
\text{IP2.} & \int f'(x)g(x)\,dx & = & f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx
\end{array}$$

Então:

$$\begin{array}{rcl}
\int x^3e^x\,dx & = & x^3e^x - \int 3x^2e^x\,dx \\
& = & x^3e^x - 3\int x^2e^x\,dx \\
\int x^2e^x\,dx & = & x^2e^x - \int 2xe^x\,dx \\
& = & x^2e^x - 2\int xe^x\,dx \\
\int xe^x\,dx & = & xe^x - \int e^x\,dx \\
& = & xe^x - e^x
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\int x^3e^x\,dx & = & x^3e^x - 3\int x^2e^x\,dx \\
& = & x^3e^x - 3(x^2e^x - 2\int xe^x\,dx) \\
& = & x^3e^x - 3(x^2e^x - 2(xe^x - \int e^x\,dx)) \\
& = & x^3e^x - 3(x^2e^x - 2(xe^x - e^x))
\end{array}$$

Derivada da função inversa

$$[\mathsf{DFI1}] \quad = \quad \left(\begin{array}{ll} \text{Se} & \forall x \in D.\ f(g(x)) = x \\ \text{Então} & \frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x = 1, \\ & \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x), \\ & f'(g(x))g'(x) = 1, \\ & g'(x) = 1/f'(g(x)) \end{array}\right)$$

$$[\mathsf{DFI2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{ll} \text{Se} & \forall x \in D.\ f(g(x)) = x \\ \text{Então} & g'(x) = 1/f'(g(x)) \end{array}\right)$$

$$[\mathsf{DFI2}] \begin{bmatrix} f(y) := e^y \\ g(x) := \ln x \\ D := (0, +\infty) \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{ll} \text{Se} & \forall x \in (0, +\infty).\ e^{\ln x} = x \\ \text{Então} & \ln'(x) = 1/e^{\ln x} \end{array}\right)$$

Derivada do ln

$$[\mathsf{DFI2}]\begin{bmatrix} f(y) := e^y \\ g(x) := \ln x \\ D := (0,+\infty) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ll} \text{Se} & \forall x \in (0,+\infty).\ e^{\ln x} = x \\ \text{Então} & \ln'(x) = 1/e^{\ln x} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rcll} \ln'(x) & = & 1/e^{\ln x} & \qquad (\text{pelo } [\mathsf{DFI2}]) \\ & = & 1/x & \end{array}$$

Derivada do arcsen

$$[\mathsf{DFI2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{ll} \text{Se} & \forall x \in D.\ f(g(x)) = x \\ \text{Então} & g'(x) = 1/f'(g(x)) \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{DFI2}] \begin{bmatrix} x := s \\ f(\theta) := \operatorname{sen}\theta \\ g(s) := \operatorname{arcsen} s \\ D := (-1,+1) \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{ll} \text{Se} & \forall s \in (-1,+1).\ \operatorname{sen}\operatorname{arcsen} s = s \\ \text{Então} & \operatorname{arcsen}'(s) = 1/(\cos\operatorname{arcsen} s) \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rcl} \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta & = & 1 \\ \cos^2\theta & = & 1 - \operatorname{sen}^2\theta \\ \cos\theta & = & \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} \\ \cos(\operatorname{arcsen} s) & = & \sqrt{1-(\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} s))^2} \\ & = & \sqrt{1-s^2} \\ \frac{d}{ds}\operatorname{arcsen}(s) & = & 1/(\cos\operatorname{arcsen} s) \\ & = & 1/\sqrt{1-s^2} \\ \operatorname{arcsen}(s) & = & \int 1/\sqrt{1-s^2}\,ds \end{array}$$

Derivada do arcsen **(2)**

Se $s = \operatorname{sen}\theta$ então $\frac{ds}{d\theta} = \cos\theta$, $ds = \cos\theta\, d\theta$, e:

$$\begin{array}{rl}
\multicolumn{2}{l}{\int 1/\sqrt{1-s^2}\, ds} \\
= & \int \frac{1}{\sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}} \ \cos\theta\, d\theta \\
= & \int \frac{1}{\sqrt{(\cos\theta)^2}} \ \cos\theta\, d\theta \\
= & \int \frac{1}{\cos\theta} \ \cos\theta\, d\theta \\
= & \int 1\, d\theta \\
= & \theta \\
= & \operatorname{arcsen}\operatorname{sen}\theta \\
= & \operatorname{arcsen} s
\end{array}$$

Derivada do arcsen **(3)**

Se usarmos uma caixa de anotações bem maior podemos fazer essa conta bem mais rápido...

$$\begin{array}{rl} & \int 1/\sqrt{1-s^2}\,ds \\ = & \int \frac{1}{\cos\theta} \cos\theta\,d\theta \\ = & \int 1\,d\theta \\ = & \theta \\ = & \operatorname{arcsen} s \end{array} \qquad \left[\begin{array}{c} s = \operatorname{sen}\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\,d\theta \\ 1-s^2 = \cos^2\theta \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\ \theta = \operatorname{arcsen} s \end{array}\right]$$

Essa caixa de anotações grande vai ser chamada de substituição trigonométrica (para $s = \operatorname{sen}\theta$).

Outras substituições trigonométricas famosas: $t = \tan\theta$, $z = \sec\theta$.

Normalmente a gente aprende substituições trigonométricas depois do método pra integrar potências de senos e cossenos...

Entenda os exemplos 1 e 2 daqui,
`http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-int-subst.pdf#page=12`
e tente fazer o "exercício 3" desse PDF.
Obs: no semestre passado eu usei convenções
um pouco diferentes das de agora pras
caixas de anotações...