Cálculo 2 - 2021.1

Aula 21: integração por substituição

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C2.html

Introdução

No último PDF, que era sobre os dois TFCs,
nós começamos a ver que podíamos calcular integrais
sem os limites de integração e colocá-los só no final,
e vimos que várias das nossas fórmulas de integração
vão tem uma versão pra integrais definidas e uma
outra pra integrais indefinidas...
Por exemplo:

$$\text{TFC2:} \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \quad = \quad F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

$$\text{TFC2I:} \quad \left(\int F'(x)\,dx \quad = \quad F(x) \right)$$

Introdução (2)

Lembre que nós às vezes dávamos nomes como [TFC2] e [TFC2I] pras nossas fórmulas, pra ficar mais fácil usá-las em subtituições...
Então:

$$\begin{aligned}
[\mathrm{TFC2}] &= \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
[\mathrm{TFC2I}] &= \left(\int F'(x)\,dx = F(x) \right)
\end{aligned}$$

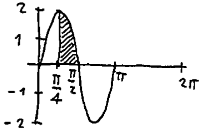
Introdução (3)

Uma das técnicas que vai ser mais úteis pra calcular integrais complicadas é *integração por substituição*, em que a gente inventa uma variável nova, substitui ela de vários jeitos (!!!) na integral original, e com isso a gente consegue transformar a integral anterior numa outra integral mais simples, mas que é em outra variável e tem outros limites de integração...

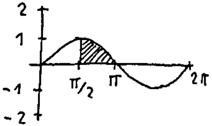
Introdução (4)

Aqui as duas figuras à direita têm a mesma área.
A primeira corresponde a uma integral mais complicada que a segunda, e pra passar da primeira pra segunda a gente amassou a figura na vertical e esticou ela na horizontal de um modo que não alterou a área dela...

$$\int_{x=\pi/4}^{x=\pi/2} 2\,\mathrm{sen}\,2x\,dx \quad = \quad \text{Área}\left(\quad \right)$$



$$\int_{x=\pi/2}^{x=\pi} \mathrm{sen}\,x\,dx \quad = \quad \text{Área}\left(\quad \right)$$



Um exemplo com contas

Isto aqui é um exemplo de como contas com integração por substituição costumam ser feitas na prática:

$$
\begin{aligned}
& \int 2\cos(3x+4)\,dx \\
= \quad & \int 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\
= \quad & \frac{2}{3}\int \cos u\,du \\
= \quad & \frac{2}{3}\operatorname{sen} u \\
= \quad & \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3x+4)
\end{aligned}
$$

É necessário indicar em algum lugar que a relação entre a variável nova e a antiga é esta: $u = 3x + 4$.

Outro exemplo com contas

$$
\begin{array}{rl}
& \displaystyle\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 \, dx \\
= & \displaystyle\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 (\cos x) \, dx \\
= & \displaystyle\int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^5 \underbrace{(\cos x)^2}_{1-s^2} \underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}} \, dx \\
= & \displaystyle\int s^5 (1 - s^2) \, ds \\
= & \displaystyle\int s^5 - s^7 \, ds \\
= & \dfrac{s^6}{6} - \dfrac{s^8}{8} \\
= & \dfrac{(\operatorname{sen} x)^6}{6} - \dfrac{(\operatorname{sen} x)^8}{8}
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{c}
s = \operatorname{sen} x \\
\frac{ds}{dx} = \cos x \\
\operatorname{sen} x = s \\
(\cos x)^2 = 1 - s^2 \\
\cos x \, dx = ds
\end{array} \right]
$$

Substituição na integral definida

Eu vou chamar a demonstração abaixo de [S2].
Ela é uma série de três igualdades: o '=' de cima,
o '=' de baixo, e o '=' da esquerda (que é um '||').
Eu vou chamar o "$F'(u) = f(u)$" de a hipótese do [S2].
Obs: nós ainda não acreditamos nessa demonstração...
vamos verificar as igualdades dela daqui a alguns slides.

$$
[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{ccc} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)
$$

Lembre que dá pra substituir só alguns símbolos...
Por exemplo:

$$
[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)
$$

$$
[\mathsf{S2}][g(x) := 2x] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(2x)\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(2x)\cdot 2\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=2a}^{u=2b} & = & \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)
$$

Também podemos substituir o f por F'...
E aí a hipótese passa a ser "trivialmente verdadeira":

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{ccc} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S2}][f(x) := F'(x)] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = F'(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{ccc} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} F'(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} F'(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

Exercício 1.
Lembre que:

$$[\mathsf{TFC2}] \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \quad = \quad F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

Calcule os resultados destas expansões:
a) $[\mathsf{TFC2}]\left[F(x) := F(g(x))\right]$
b) $[\mathsf{TFC2}]\left[x := u\right]\begin{bmatrix} a := g(a) \\ b := g(b) \end{bmatrix}$

...e verifique que se $f(u) = F'(u)$ então:
c) o que você obteve no (a) prova o '$=$' de cima da [$\mathsf{S2}$],
d) o que você obteve no (b) prova o '$=$' de cima da [$\mathsf{S2}$],

O '$||$' à esquerda na $[\mathsf{S2}]$
é bem fácil de verificar... ó:

$$\begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & F(g(b)) - F(g(a)) \\ & = & F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \end{array}$$

Se você conseguiu fazer todos os itens
do exercício 1 e conseguiu entender isso aí
então agora você entende o $[\mathsf{S2}]$ como uma
demonstração — você entende todas as
igualdades dele.

Pra que serve a hipótese do [S2]?
Ela serve pra gente lidar com 'f's que a gente não sabe integrar! Por exemplo:

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S2}] \begin{bmatrix} f(x) := \tan x \\ g(u) := 2u \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc} \color{red}{\text{Se } F'(u) = \tan u \text{ então:}} \\ F(2x)\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \tan(2x) \cdot 2\,dx \\ \parallel & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} \tan(u)\,du \end{array} \right)$$

Uma versão do [S2] para integrais indefinidas

Compare... e repare no "Obs: $u = g(x)$".

$$
[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l}
\text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\
\begin{array}{rcl}
F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\
\| & & \\
F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du
\end{array}
\end{array}\right)
$$

$$
[\mathsf{S2I}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l}
\text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\
\begin{array}{rcl}
F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\
\| & & \\
F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du
\end{array} \\
\text{Obs: } u = g(x).
\end{array}\right)
$$

Versões sem a parte da esquerda

Compare:

$$[\mathsf{S2}] = \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{ccc} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S3}] = \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

Versões sem a parte da esquerda (2)

...e compare:

$$[\mathsf{S2I}] \;=\; \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S3I}] \;=\; \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$$

As pessoas costumam usar variações da [S3I], geralmente sem darem um nome pra função $g(u)$... Lembre que em vários exercícios que nós já fizemos ficava implícito que vocês tinhan que descobrir qual era a substituição certa... por exemplo:

$$x^2\Big|_{x=4}^{x=5} = ?$$

$$\left(f(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a) \right) \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ a := ? \\ b := ? \end{bmatrix} = ?$$

$$\left(f(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a) \right) \begin{bmatrix} f(x) := x^2 \\ a := 4 \\ b := 5 \end{bmatrix} = \left(x^2\Big|_{x=4}^{x=5} = 5^2 - 4^2 \right)$$

$$x^2\Big|_{x=4}^{x=5} = 5^2 - 4^2$$

Exercício 2.
Nos livros e nas notas de aula que você vai encontrar por aí o "Obs: $u = g(x)$" da nossa [S3I] quase sempre aparece escrito de (ZILHÕES DE!!!) outros jeitos, então o melhor que a gente pode fazer é tentar encontrar as substituições que transformam a nossa [S3I] em algo "mais ou menos equivalente" às igualdades complicadas que eu mostrei no vídeo e que eu disse que a gente iria tentar decifrar...

Nos itens a e b deste exercício você vai tentar encontrar as substituições — que eu vou escrever como '[?]' — que transformam a [S3I] em algo "mais ou menos equivalente" às igualdades da direita.

Exercício 2 (cont.)
Encontre as substituições '[?]'s que façam com que:

a) $\begin{pmatrix} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{pmatrix}$ [?] vire algo como $\begin{pmatrix} \displaystyle\int 2\cos(3x+4)\,dx \\ \parallel \\ \displaystyle\int 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \end{pmatrix}$

b) [S3I] [?] vire algo como $\begin{pmatrix} \displaystyle\int (\operatorname{sen} x)^5(1-\operatorname{sen} x^2)(\cos x)\,dx \\ \parallel \\ \displaystyle\int s^5(1-s^2)\,ds \end{pmatrix}$

Gambiarras

Em geral é mais prático a gente usar umas gambiarras como "$\frac{du}{dx}dx = du$" ao invés do método "mais honesto" que a gente usou no exercício 2...

Às vezes essas gambiarras vão usar uma versão disfarçada do teorema da derivada da função inversa: $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}}$, e umas outras manipulações esquisitas de 'dx's e 'du's que só aparecem explicadas direito nos capítulos sobre "diferenciais" dos livros de Cálculo.

Nós vamos começar usando elas como gambiarras mesmo, e acho que nesse semestre não vai dar pra ver como traduzir cada uma delas pra algo formal...

Gambiarras (2)

Quando a gente está começando e ainda não tem prática este modo de por anotações embaixo de chaves ajuda muito:

$$\int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^5 (1 - (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^2)\, \underbrace{\underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}}\; dx}_{ds} \quad = \quad \int s^5(1-s^2)\, ds$$

Quando a gente já tem mais prática acaba sendo melhor pôr todas as anotações dentro de caixinhas — por exemplo:

$$\left[\begin{array}{c} \operatorname{sen} x = s \\ \frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x \\ \cos x\, dx = ds \end{array} \right]$$

Gambiarras (3)

Essas caixinhas, como

$$\left[\begin{array}{c} \operatorname{sen} x = s \\ \frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x \\ \cos x \, dx = ds \end{array}\right]$$

vão ser os únicos lugares em que nós vamos permitir esses 'dx's e 'ds' "soltos", que não estão nem em derivadas e nem associados a um sinal '$\int$'...

E esses 'dx's e 'ds' "soltos" só vão aparecer em linhas que dizem como traduzir uma expressão que termina em 'dx' numa integral em x pra uma expressão que termina em 'ds' numa integral na variável s.

Nós vamos evitar usar s como uma abreviação para $\operatorname{sen} x$.

Mais sobre as caixinhas de anotações
Tudo numa caixinha de anotações é consequência da primeira linha dela, que é a que define a variável nova. Por exemplo, se definimos a variável nova como $c = \cos x$ então $\frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x$, e podemos reescrever isso na "versão gambiarra" como: $dc = -\operatorname{sen} x\,dx$, e também como $\operatorname{sen} x\,dx = (-1)dc$.

A caixinha vai ser:

$$\left[\begin{array}{c} c = \cos x \\ \frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x \\ dc = -\operatorname{sen} x\,dx \\ \operatorname{sen} x\,dx = (-1)\,dc \end{array}\right]$$

Mais sobre as caixinhas de anotações (2)

Muito importante: cada linha das caixinhas é uma série de igualdades — por exemplo $\mathsf{expr}_1 = \mathsf{expr}_2 = \mathsf{expr}_3$ — e cada uma dessas expressões $\mathsf{expr}_1, \ldots, \mathsf{expr}_n$ só pode mencionar ou a variável antiga ou a variável nova...

Então:

Bom: $dc = -\operatorname{sen} x \, dx$
Mau: $\frac{1}{-\operatorname{sen} x} dc = dx$
Bom: $\frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx} \cos x$

Truque: em $\frac{dc}{dx}$ o c faz o papel de uma abreviação para $\cos x$, não de uma variável.

Mais sobre as caixinhas de anotações (3)
Quando a gente faz algo como

$$\int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^5 (1 - (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^2) \underbrace{\underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}}\, dx}_{ds} \quad = \quad \int s^5 (1 - s^2)\, ds$$

Cada chave é como uma igualdade da caixa de anotações "escrita na vertical"... por exemplo, "$\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s}$" é $s = \operatorname{sen} x$.

As outras chaves correspondem a outras igualdades da caixa de anotações — que têm que ser consequências desse $s = \operatorname{sen} x$.

Mais sobre as caixinhas de anotações (3)

Isto aqui está errado:

$$\int (\operatorname{sen} x)^5 (1 - (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^2)\, \underbrace{\underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}}\, dx}_{ds} \quad = \quad \int (\operatorname{sen} x)^5 (1 - s^2)\, ds$$

À esquerda do '=' a gente tem uma integral na qual só aparece a "variável antiga", que é x, e à direita do '=' a gente tem uma integral na qual aparecem tanto a variável antiga, x, quanto a nova, que é s... =(

Lembre que tanto o truque das caixinhas quanto o truque das chaves servem pra gente conseguir aplicar a [S3I] de um jeito mais fácil, e no [S3I] uma integral usa só a variável antiga e a outra usa só a nova.

Exercício 3.
Leia o início da seção 6.1 do APEX Calculus
e faça os exercíos 25 até 32 da página 280 dele. Link:
`http://angg.twu.net/2021.1-C2/APEX_Calculus_Version_4_BW_secs_6.1_6.2.pdf`

Exercício 4.
Leia o início da seção 6.1 do Martins/Martins
e refaça os exercícios resolvidos 1 a 6 dele
usando ou as nossas anotações sob chaves ou
as nossas anotações em caixinhas. Link:
`http://angg.twu.net/2021.1-C2/martins_martins__sec_6.1.pdf`

Exercício 5.

A questão 2 da P1 do semestre passado dizia que:

> *Toda integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variável (ou: "por uma sequência de integrações por substituição") pode ser resolvida por uma mudança de variável só.*

E ela pedia pra vocês verificarem isso num caso específico. Tente fazer essa questão olhando poucas vezes pro gabarito dela. Link:

`http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=4`