Cálculo 2 - 2021.1

Aula 2: integrais como somas de retângulos (1)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C2.html

Pra que a gente vai usar integrais e EDOs?

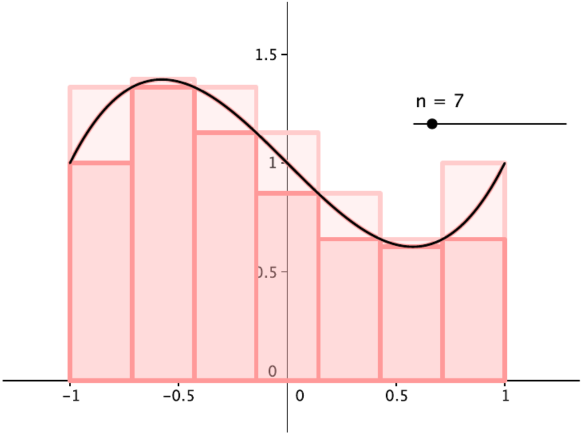
Pra ser bem honesto:

1. Pra passar em Cálculo 2
2. Em umas poucas matérias depois
3. Em quase nada depois que a gente crescer

MAAAAAS pra aprender a integrar e resolver EDOs nós vamos precisar aprender várias coisas que a gente vai usar zilhões de vezes depois do curso... e o que a gente vai começar a ver hoje, que é *como interpretar certos somatórios como áreas e como visualizar essas áreas*, vai ser incrivelmente útil depois.

Algumas figuras

Dê uma olhada nas notas de aula da Cristiane Hernández, linkadas na página do curso... ela usa várias figuras como essa aqui:



Algumas áreas fáceis de calcular
Por enquanto a gente sabe calcular a área de algumas figuras simples: retângulos, triângulos, trapézios, e figuras formadas por vários retângulos, triângulos e trapézios.

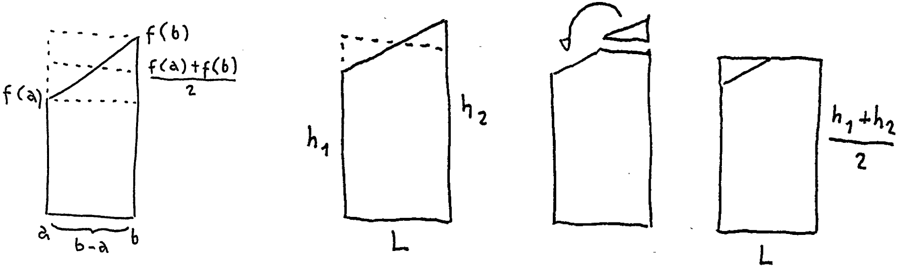
Algumas pessoas viram no Ensino Médio um método de calcular a área de qualquer polígono. Vamos rever isto agora.
Assista os primeiros 10 minutos deste vídeo do Mathologer:
http://www.youtube.com/watch?v=0KjG8Pg6LGk

Algumas idéias dele vão ser muito importantes pra gente depois.
Por exemplo, que áreas podem ser calculadas de vários jeitos, e que alguns pedaços devem ser contados "negativamente".

Na verdade nós vamos usar principalmente retângulos e trapézios...

Áreas de trapézios

O truque pra calcular a área de um trapézio é transformá-lo num retângulo com a mesma área que ele por cortar-e-colar. Veja:



Nossa função preferida

Seja $f(x) = 4 - (x-2)^2$.
Isto é uma parábola com a concavidade pra baixo.
Verifique que:
$f(0) = 4 - 4 = 0$,
$f(1) = 4 - 1 = 3$,
$f(2) = 4 - 0 = 4$,
$f(3) = 4 - 1 = 3$,
$f(4) = 4 - 4 = 0$.

Além disso $f'(x) = -2(x-2)$, $f'(1) = 2$, $f'(3) = -2$, e
a reta tangente à curva $y = f(x)$ em $x = 1$ tem coef. angular 2, e
a reta tangente à curva $y = f(x)$ em $x = 3$ tem coef. angular -2.

Exercício 1: use estas informações para traçar o gráfico de $f(x)$ entre $x = 0$ e $x = 4$.

Dois jeitos de visualizar $(x, f(x))$
Jeito burro:
Em $x = 2.5$ temos
$f(2.5) = 4 - (2.5 - 2)^2 = 4 - 0.5^2 = 4 - 0.25 = 3.75.$
Encontre o ponto $y = 3.75$ no eixo y.
Desenhe o ponto $(2.5, 3.75)$.

Jeito esperto/rápido:
Encontre no eixo x o ponto $x = 2.5$.
Suba esse ponto pra curva $y = f(x)$ –
você encontrou o ponto $(2.5, f(2.5))$!

Mais exercícios

Exercício 2. Desenhe o gráfico da nossa função preferida (obs: sempre no intervalo entre $x = 0$ e $x = 4$!) e desenhe sobre ele o retângulo "cuja área é $f(0.5) \cdot (1.5 - 0.5)$". Truque: isto é altura · base, e a base vai de $x = 0.5$ a $x = 1.5$.

Exercício 3. Desenhe em outro gráfico a nossa função preferida e sobre ela os retângulos da soma abaixo:

$$f(0.5) \cdot (1.5 - 0.5) + f(1.5) \cdot (2 - 1.5) + f(2) \cdot (3 - 2) + f(3.5)(3.5 - 3)$$

Partições

Informalmente uma partição de um intervalo $[a, b]$ é um modo de decompor $[a, b]$ em intervalos menores consecutivos. Por exemplo,

$$[2, 7] = [2, 3.5] \cup [3.5, 4] \cup [4, 6] \cup [6, 7]$$

A definição "certa" é mais complicada... vamos vê-la daqui a pouco.
Caso geral:

$$[a, b] = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \ldots \cup [a_N, b_N],$$

onde:
N é o número de intervalos,
$a = a_1$, $b = b_N$, ("extremidades")
$a_i < b_i$ para todo i em que isto faz sentido ($i = 1, \ldots, N$)
$b_i = a_{i+1}$ para todo i e.q.i.f.s.; neste caso, $i = 1, \ldots, N - 1$

Partições (2)

Um jeito prático de definir uma partição é usando uma tabela.
Por exemplo, esta tabela

i	a_i	b_i
1	2	3.5
2	3.5	4
3	4	6
4	6	7

corresponde à partição de $[2, 7]$ do slide anterior.
Exercício 4. Converta esta "partição"

$$[4, 12] = [4, 5] \cup [5, 6] \cup [6, 9] \cup [9, 10] \cup [10, 12]$$

numa tabela. Neste caso quem são a, b e N?

Partições (3)
A definição certa de partição é a seguinte.
Digamos que P seja um subconjunto não-vazio e finito de $\mathbb{R}$,
e que o menor elemento de P seja a e o maior seja b.
Então P é uma partição do intervalo $[a, b]$.

Exemplo: a partição $P = \{2, 3.5, 4, 6, 7\}$ corresponde a:

$$[2, 7] = [2, 3.5] \cup [3.5, 4] \cup [4, 6] \cup [6, 7]$$

Pra fazer a tradução ponha os elementos de P em ordem e chame-os de $b_0, \ldots, b_N$; defina cada a_i como sendo b_{i-1} – por exemplo, $a_1 = b_0$ – e encontre a, b, e N.

Exercício 5. Converta a partição $P = \{2.5, 3, 4, 6, 10\}$ para o formato tabela e para o formato $[a, b] = [a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_N, b_N]$.

Partições definem muitas coisas implicitamente

Quando dizemos algo como "Seja P a partição $\{2.5, 4, 6\}$" estamos criando um contexto no qual há uma partição "default" definida... e neste contexto vamos ter valores definidos para N, a, b, e para cada a_i e b_i. Por exemplo...

Seja P a partição $\{2.5, 4, 6\}$. Então

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{i=1}^{N} f(b_i) \cdot (b_i - a_i) & = & \sum_{i=1}^{2} f(b_i) \cdot (b_i - a_i) \\
& = & f(b_1) \cdot (b_1 - a_1) + f(b_2) \cdot (b_2 - a_2) \\
& = & f(4) \cdot (4 - 2.5) + f(6) \cdot (6 - 4)
\end{array}$$

Note que a expressão $\sum_{i=a}^{b} \mathsf{expr}$ quer dizer "some várias cópias da expressão expr, a primeira com i substituido por a, a segunda com i substituido por $a+1$, etc etc, até a cópia com i substituido por b"...

Se você tiver dificuldade pra interpretar alguma expressão com somatórios você pode calculá-la beeem passo a passo usando a operação '[:=]' da aula passada. Por exemplo:

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{i=4}^{7} f(b_i)\cdot(b_i - a_i) & = & (f(b_i)\cdot(b_i - a_i))[i:=4] \\
& + & (f(b_i)\cdot(b_i - a_i))[i:=5] \\
& + & (f(b_i)\cdot(b_i - a_i))[i:=6] \\
& + & (f(b_i)\cdot(b_i - a_i))[i:=7] \\
& = & f(b_4)\cdot(b_4 - a_4) \\
& + & f(b_5)\cdot(b_5 - a_5) \\
& + & f(b_6)\cdot(b_6 - a_6) \\
& + & f(b_7)\cdot(b_7 - a_7) \\
& = & \ldots
\end{array}$$

Alguns exercícios de visualizar somas de retângulos...

Exercício 6. Seja f a nossa função preferida e seja P a partição $\{0.5, 1, 2, 2.5\}$. Represente num gráfico só a curva $y = f(x)$ e os retângulos da soma $\sum_{i=1}^{N} f(b_i) \cdot (b_i - a_i)$.

Exercício 7. Seja f a nossa função preferida e seja P a mesma partição que no exercício anterior. Represente num gráfico só – separado do gráfico do exercício anterior!!! – a curva $y = f(x)$ e os retângulos da soma $\sum_{i=1}^{N} f(a_i) \cdot (b_i - a_i)$.

Exercício 8. Usando a mesma função f e a mesma partição P dos exercícios anteriores, represente num outro gráfico a curva $y = f(x)$ e os retângulos da soma $\sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2}) \cdot (b_i - a_i)$. Repare que $\frac{a_i+b_i}{2}$ é o ponto médio do intervalo $[a_i, b_i]$, e é fácil encontrar pontos médios no olhômetro.

Agora comparando com a Wikipedia

Exercício 9. Dê uma olhada na página

https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann

da Wikipedia. Vamos tentar entender alguns pedaços dela.

Seja P a "partição do intervalo $[0, 3]$ em 6 subintervalos iguais". Tem um ponto em que a página da Wikipedia diz: "os pontos da partição serão..." – entenda as definições dela, descubra quem é Δx neste caso, e escreva quais são os pontos desta partição na linguagem da página da Wikipedia e na linguagem que eu usei nos slides.

Expanda a fórmula da página da Wikipedia para a "soma média" neste caso. Expanda também a nossa fórmula $\sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2}) \cdot (b_i - a_i)$ e compare as duas expansões.

(Vamos ver o que são "ínfimos" e "supremos" na aula que vem)

Dicas pro exercício 9

Eu pus um vídeo com várias dicas pro exercício 9 aqui:

`http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C2-somas-1.mp4`
`https://www.youtube.com/watch?v=Ht5iLKGlysM`

Uma dica extra... no Ensino Médio às vezes convencem a gente de que uma fração como $\frac{6}{4}$ tem que ser simplificada pra $\frac{3}{2}$, mas se a gente tem que listar uma sequência de números começando em 0 em que cada número novo é o anterior mais $\frac{1}{4}$ eu acho bem melhor escrever essa sequência como $\frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}$ do que como $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2} \ldots$

Dicas pro exercício 9 (2)

Além disso no exercício 9 você vai ter alguns somatórios de expressões como $f(\frac{a_i+b_i}{2})\cdot(b_i-a_i)$ em que todos os '(b_i-a_i)'s dão o mesmo valor. Você *pode* reescrever todos esses '(b_i-a_i)'s como números, mas se você parar as suas expansões e simplificações um passo antes e mantiver eles como $(0.5-0)$, $(1-0.5)$, etc, aí vai ser fácil interpretar cada $f(\frac{a_i+b_i}{2})\cdot(b_i-a_i)$ como um retângulo.

Sobre o "jeito esperto", leia isto aqui:

`http://angg.twu.net/2021.1-C2/2021-jun-18-pergunta_sobre_jeito_esperto.pdf`

Trapézios
Tem dois modos diferentes da gente interpretar geometricamente $\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$:

1) como um retângulo de altura $\frac{f(a)+f(b)}{2}$, ou
2) como um trapézio com vértices

$$(a,0),(b,0),(b,f(b)),(a,f(a))$$

.

Exercício 10. Sejam f a nossa função preferida e P a partição $\{0,1,2\}$. Desenhe num gráfico só a curva $y=f(x)$ e os trapézios da soma:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i-a_i)$$

(Veja as figuras da "Regra Trapezoidal" na página da Wikipedia)