

Cálculo 3 - 2021.1

P1 (primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2021.1-C3.html>

Regras e dicas

As regras e dicas são as mesmas dos mini-testes:

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-MT1.pdf>

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-MT2.pdf>

exceto que a prova vai ser disponibilizada às 20:00 do dia 3/setembro/2021 e deve ser entregue até as 20:00 do dia 4/setembro/2021.

Todas as questões são baseadas em exercícios deste PDF:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-gradiente.pdf>

Vou me referir a ele como “[G]” (de “Gradiente”).

Questão 1.**(Total: 2.5 pts)**

- a) **(0.5 pts)** Faça o exercício (1c) do [G].
- b) **(1.0 pts)** Faça o exercício (1g) do [G].
- c) **(1.0 pts)** Faça o exercício (1h) do [G].

Questão 2.

(Total: 4.5 pts)

Faça os itens abaixo do exercício 2 do [G],
mas considerando que $(x_0, y_0) = (-1, 1)$.

- a) **(1.0 pts)** Faça o item (2a) do [G].
- b) **(0.5 pts)** Faça o item (2b) do [G].
- c) **(0.5 pts)** Faça o item (2c) do [G].
- d) **(0.5 pts)** Faça o item (2d) do [G].
- e) **(1.0 pts)** Faça o item (2e) do [G], mas mostrando como representar graficamente $h'_{\text{cima}}(x_0)$ e explicando porque o seu resultado “faz sentido”.
- f) **(0.5 pts)** Faça o item (2f) do [G].
- g) **(0.5 pts)** Faça o item (2g) do [G].

Questão 3.**(Total: 2.0 pts)**

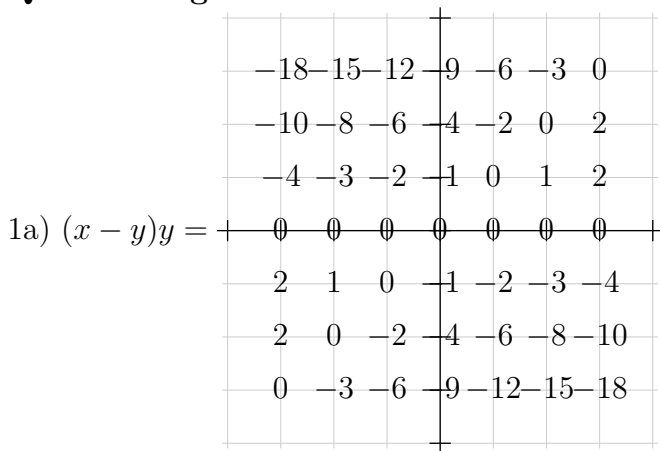
Faça os itens abaixo do exercício 3 do [G],
mas considerando que $(x_0, y_0) = (-1, 1)$.

- a) **(1.0 pts)** Faça o item (3a) do [G].
- b) **(0.5 pts)** Faça o item (3b) do [G].
- c) **(0.5 pts)** Faça o item (3c) do [G].

Questão 4.**(Total: 1.0 pts)**

Generalize o seu item (3c) — refaça ele considerando que o ponto (x_0, y_0) é um ponto qualquer de \mathbb{R}^2 , não necessariamente o ponto $(-1, 1)$.

Questão 1: gabarito

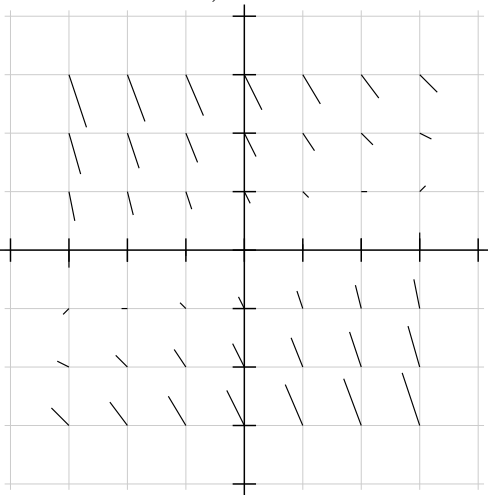


1b) (Vou desenhar as curvas de nível à mão)

Questão 1: gabarito (cont.)

(Imagine que os tracinhos são setinhas)

$$1c) \nabla G = \overrightarrow{\left(\frac{y}{10}, \frac{x-2y}{10} \right)} =$$



Questão 2: gabarito

$$2a) h_{\text{cima}}(x) = (x + \sqrt{x^2 + 8})/2, \quad h_{\text{baixo}}(x) = (x - \sqrt{x^2 + 8})/2$$

2b) (Vou desenhar o gráfico à mão)

$$2c) h_{\text{cima}}(x_0) = (-1 + \sqrt{(-1)^2 + 8})/2 = 1 = y_0$$

$$2d) h'_{\text{cima}}(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2+8}} + \frac{1}{2}$$

$$2e) h'_{\text{cima}}(x_0) = \frac{-1}{2\sqrt{(-1)^2+8}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

(falta o desenho)

$$2f) \vec{v} = \overrightarrow{(1, \frac{1}{3})}; \text{ desenhar}$$

$$2g) \nabla F = \overrightarrow{(y, x - 2y)}; \nabla F(x_0, y_0) = \overrightarrow{(1, -1 - 2 \cdot 1)} = \overrightarrow{(1, -3)};$$

$$\vec{v} \cdot \nabla F(x_0, y_0) = \overrightarrow{(1, \frac{1}{3})} \cdot \overrightarrow{(1, -3)} = 1 - 1 = 0$$

Questão 3: gabarito

a) $\frac{d}{dz}z = 0$, $\frac{d}{dz}z = z_x + z_y y_x$, $y_x = -\frac{z_x}{z_y}$;

se $z = (x - y)y = xy - y^2$ então $z_x = y$, $z_y = x - 2y$,
 $y_x = -\frac{y}{x-2y}$.

b) Em $(x, y) = (-1, 1)$ temos $y_x = -\frac{1}{-1-2 \cdot 1} = \frac{1}{3}$.

c) Em $(x, y) = (0, 1)$ temos
 $\overrightarrow{(1, y_x)} \cdot \nabla F = \overrightarrow{(1, \frac{1}{3})} \cdot \overrightarrow{(1, -3)} = 1 - 1 = 0$.

Questão 4: gabarito

$$\frac{d}{dz}z = 0, \frac{d}{dz}z = z_x + z_y y_x, y_x = -\frac{z_x}{z_y};$$

se $z = (x - y)y = xy - y^2$ então $z_x = y, z_y = x - 2y,$
 $y_x = -\frac{y}{x-2y}.$

Temos $\nabla F = \overrightarrow{(y, x - 2y)}$ (num ponto (x, y) qualquer).

$$\overrightarrow{(1, y_x)} \cdot \nabla F = \overrightarrow{(1, -\frac{y}{x-2y})} \cdot \overrightarrow{(y, x - 2y)} = y + (-\frac{y}{x-2y} \cdot (x - 2y)) = 0.$$