Cálculo 3 - 2021.1

P2 (segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Regras e dicas

As regras e dicas são as mesmas dos mini-testes:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-MT1.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-MT2.pdf

exceto que a prova vai ser disponibilizada às 23:30 do dia 15/setembro/2021 e deve ser entregue até as 23:30 do dia 17/setembro/2021. Talvez o Classroom esteja com a data de entrega errada, como se o prazo fosse só de 24 horas.

Pra fazer essa prova você vai precisar de idéias que a gente viu durante o curso todo. Se você precisar saber onde estão as idéias necessárias pra resolver algum item pergunte no grupo do Telegram da turma que eu respondo com um link pros slides, vídeos, ou livros em que aquela idéia aparece.

Questão 1.
(Total: 5.5 pts)

Você deve ter lido que "o gradiente de uma função aponta pra direção de maior crescimento dela". Nesta questão nós vamos ver um modo de provar isto — num caso particular em $\mathbb{R}^2$.
O caso geral vai ser este aqui:

$$\begin{array}{rcl}
F & : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\
P_0 & \in & \mathbb{R}^2 \\
\vec{v} & = & \nabla F(P_0) \\
\vec{v} & = & \overrightarrow{(a,b)} \\
\vec{u} & \perp & \vec{v}, \text{ obedecendo } ||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| \\
A & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^2 \mid d(P_0, Q) = ||\vec{v}|| \,\} \\
B & = & \{P_0 + \overrightarrow{(\pm a, \pm b)}\} \cup \{P_0 + \overrightarrow{(\pm b, \pm a)}\} \\
\theta & \in & \mathbb{R} \\
\vec{w} & = & (\cos\theta)\vec{v} + (\operatorname{sen}\theta)\vec{u}
\end{array}$$

Questão 1 (cont.)

O caso particular vai ser o da coluna da direita abaixo:

$$\begin{array}{rcl} F & : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ P_0 & \in & \mathbb{R}^2 \\ \vec{v} & = & \nabla F(P_0) \\ \vec{v} & = & \overrightarrow{(a,b)} \\ \vec{u} & \perp & \vec{v},\ \text{obedecendo } ||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| \\ A & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^2 \mid d(P_0, Q) = ||\vec{v}|| \,\} \\ B & = & \{P_0 + \overrightarrow{(\pm a, \pm b)}\} \cup \{P_0 + \overrightarrow{(\pm b, \pm a)}\} \\ \theta & \in & \mathbb{R} \\ \vec{w} & = & (\cos\theta)\vec{v} + (\operatorname{sen}\theta)\vec{u} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) & = & 10 - 2x + y \\ P_0 & = & (3,2) \\ \vec{v} & = & \nabla F(P_0) \\ \vec{u} & = & \overrightarrow{(1,2)} \end{array}$$

Dica: neste caso particular o conjunto B vai ser um conjunto de 8 pontos equidistantes de P_0, todos com coordenadas inteiras.

Questão 1 (cont.)
Nesse caso particular,

a) **(0.2 pts)** Dê as coordenadas dos 8 pontos de B.

b) **(0.2 pts)** Represente graficamente num gráfico só:
P_0, $P_0 + \vec{v}$ e $P_0 + \vec{u}$ (como setas), A, B.

c) **(0.5 pts)** Faça um diagrama de numerozinhos pra função F, mas no qual você só vai indicar os valores de $F(x,y)$ nos pontos em que $(x,y) \in B$ e em $(x,y) = P_0$.

d) **(0.1 pts)** Seja P_1 o ponto de B no qual $F(x,y)$ assume o maior valor. Diga as coordenadas de P_1 e faça um círculo em torno de P_1 na figura que você fez no item (c).

e) **(1.0 pts)** Acrescente à figura do seu item (c) as curvas de nível da $F(x,y)$ que passam pelos pontos de B.

Questão 1 (cont.)
Ainda nesse caso particular,

f) **(0.5 pts)** Verifique que P_1 é um ponto da forma $P_0 + \alpha\vec{v}$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Qual é o valor de α?

g) **(0.5 pts)** Sejam P_2 e P_3 os dois pontos de B em que temos $F(P_0) = F(P_2) = F(P_3)$. Diga as coordenadas de P_2 e P_3 e verifique que tanto P_2 quanto P_3 são da forma $P_0 + \beta\vec{u}$. Qual é o valor de β associado ao P_2? E qual é o valor de β associado ao P_3?

Questão 1 (cont.)
Ainda nesse caso particular...

h) **(0.5 pts)** Na "notação de físicos" podemos dizer que "$\vec{w}$ é função de θ", e podemos escrever isto assim: $\vec{w} = \vec{w}(\theta)$. Represente graficamente num gráfico só, separado dos gráficos anteriores: P_0, o conjunto A, e $P_0 + \vec{w}(\theta)$ para estes valores de θ: $0°$, $45°$, $90°$. Não esqueça de indicar qual é o θ associado a cada seta!

i) **(1.0 pts)** Encontre uma fórmula para $F(P_0 + \vec{w}(\theta))$. Simplifique o resultado dela o máximo que puder.

j) **(0.5 pts)** Encontre uma fórmula para $\frac{d}{d\theta}F(P_0 + \vec{w}(\theta))$. Simplifique o resultado dela o máximo que puder.

Questão 1 (cont.)
Ainda nesse caso particular...

k) **(0.5 pts)** Seja $z = z(\theta) = F(P_0 + \vec{w}(\theta))$, pra abreviar. Faça o gráfico de $z(\theta)$ — com θ crescendo pra direita e z crescendo pra cima — e mostre no gráfico para quais valores de θ o valor de z é maximo e mínimo.

Questão 2.
(Total: 3.0 pts)
Aqui nós vamos generalizar a questão 1 —
pra um caso particular bem mais geral que o anterior,
que é o da coluna da direita abaixo:

$$\begin{array}{rcl}
F & : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\
P_0 & \in & \mathbb{R}^2 \\
\vec{v} & = & \nabla F(P_0) \\
\vec{v} & = & \overrightarrow{(a,b)} \\
\vec{u} & \perp & \vec{v}, \text{ obedecendo } ||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| \\
A & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^2 \mid d(P_0, Q) = ||\vec{v}||\, \} \\
B & = & \{P_0 + \overrightarrow{(\pm a, \pm b)}\} \cup \{P_0 + \overrightarrow{(\pm b, \pm a)}\} \\
\theta & \in & \mathbb{R} \\
\vec{w} & = & (\cos\theta)\vec{v} + (\operatorname{sen}\theta)\vec{u}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
F(x,y) & = & \alpha x + \beta y + \gamma \\
(\alpha, \beta) & \neq & (0,0) \\
\vec{u} & = & \overrightarrow{(b, -a)}
\end{array}$$

Questão 2 (cont.)
Seja $z = z(\theta) = F(P_0 + \vec{w}(\theta))$, pra abreviar.

a) **(1.0 pts)** Encontre uma fórmula para $z(\theta)$.
Simplifique o resultado dela o máximo que puder.

b) **(1.0 pts)** Encontre uma fórmula para $\frac{d}{d\theta}z(\theta)$.
Simplifique o resultado dela o máximo que puder.

c) **(1.0 pts)** Faça o gráfico de $z(\theta)$ — com θ crescendo pra direita e z crescendo pra cima — e mostre no gráfico para quais valores de θ o valor de z é maximo e mínimo.

Questão 3.
(Total: 2.0 pts)

Na última aula antes da prova nós começamos a fazer esse "Exercício 5" aqui, mas não terminamos...

http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-abertos-e-fechados.pdf#page=9

Use as "traduções" dos slides 14 e 15 desse PDF sobre abertos e fechados pra traduzir isto aqui pra uma outra expressão que seja "a mais simples possível":

$$[2, 4] \text{ não é aberto}$$

Questão 3 (cont.)

Dá pra definir formalmente o que quer dizer esse "mais simples possível" entre aspas, mas a definição formal é meio horrível. A dica é que no slide 14 desse PDF, cujo título é "Algumas traduções", cada igualdade da tabela é desta forma:

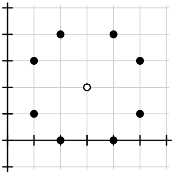
$$\text{expressão “mais complicada”} \quad = \quad \text{expressão “mais simples”}$$

com a expressão "mais simples" à direita.

Gabarito

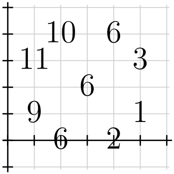
Questões 1a até 1e

(Os desenhos estão muito incompletos)

1a) 

$$(2,4), (4,4),$$
$$(1,3), \quad (5,3),$$
$$(1,1), \quad (5,1),$$
$$(2,0), (4,0)$$

1b)
$$\vec{v} = \overrightarrow{(-2{,}1)} \qquad P_0 = (3{,}2)$$
$$\vec{u} = \overrightarrow{(1{,}2)} \qquad P_0+\vec{v} = (1{,}3)$$
$$P_0+\vec{u} = (4{,}4)$$

1c) 

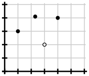
1d) $P_1 = (1,3)$

Questões 1f até 1h

1f) $P_1 = (1,3) = P_0 + 1\vec{v} = (3,2) + 1\overrightarrow{(-2,1)}$

1g) $$\begin{aligned} P_2 &= (2,0) = P_0 + (-1)\cdot\vec{u} = (3,2) + (-1)\cdot\overrightarrow{(1,2)} \\ P_3 &= (4,4) = P_0 + 1\cdot\vec{u} = (3,2) + 1\cdot\overrightarrow{(1,2)} \end{aligned}$$

1h) $$\begin{array}{rcccl} \vec{w}(0^\circ) & = & (\cos 0^\circ)\vec{v} + (\operatorname{sen} 0^\circ)\vec{v} & = & \overrightarrow{(-2,1)} + \overrightarrow{(0,0)} \\ \vec{w}(45^\circ) & = & (\cos 45^\circ)\vec{v} + (\operatorname{sen} 45^\circ)\vec{v} & = & \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{(-2,1)} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{(1,2)} \\ \vec{w}(90^\circ) & = & (\cos 90^\circ)\vec{v} + (\operatorname{sen} 90^\circ)\vec{v} & = & \overrightarrow{(0,0)} + \overrightarrow{(1,2)} \\ P_0 + \vec{w}(0^\circ) & = & (3,2) + \overrightarrow{(-2,1)} & & \\ P_0 + \vec{w}(45^\circ) & = & (3,2) + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{(-1,3)} & & \\ P_0 + \vec{w}(90^\circ) & = & (3,2) + \overrightarrow{(1,2)} & & \end{array}$$



Questões 1i e 1j

1i)

$$\begin{array}{rcl}
F(P_0+\vec{w}(\theta)) & = & F((3,2)+(\cos\theta)\overrightarrow{(-2,1)}+(\operatorname{sen}\theta)\overrightarrow{(1,2)}) \\
 & = & F((3,2)+\overrightarrow{(-2\cos\theta+\operatorname{sen}\theta,\cos\theta+2\operatorname{sen}\theta)}) \\
 & = & F((3-2\cos\theta+\operatorname{sen}\theta,2+\cos\theta+2\operatorname{sen}\theta)) \\
 & = & 10-2(3-2\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)+(2+\cos\theta+2\operatorname{sen}\theta) \\
 & = & 10-6+4\cos\theta-2\operatorname{sen}\theta+2+\cos\theta+2\operatorname{sen}\theta \\
 & = & 6+5\cos\theta
\end{array}$$

1j)

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{d\theta}F(P_0+\vec{w}(\theta)) & = & \frac{d}{d\theta}(6+5\cos\theta) \\
 & = & -5\operatorname{sen}\theta
\end{array}$$

Questões 2a e 2b

2a) Temos $\vec{v} = \nabla F(P_0) = \overrightarrow{(\alpha, \beta)}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(a, b)}$,
Então $\alpha = a$ e $\beta = b$. Aí:

$$\begin{array}{rcl}
z(\theta) & = & F(P_0 + \vec{w}(\theta)) \\
& = & F((x_0, y_0) + (\cos\theta)\overrightarrow{(a,b)} + (\operatorname{sen}\theta)\overrightarrow{(b,-a)}) \\
& = & F((x_0, y_0) + \overrightarrow{((\cos\theta)a + (\operatorname{sen}\theta)b, (\cos\theta)b - (\operatorname{sen}\theta)a)}) \\
& = & \alpha(x_0 + (\cos\theta)a + (\operatorname{sen}\theta)b) + \beta(y_0 + (\cos\theta)b - (\operatorname{sen}\theta)a) + \gamma \\
& = & \alpha(x_0 + (\cos\theta)\alpha + (\operatorname{sen}\theta)\beta) + \beta(y_0 + (\cos\theta)\beta - (\operatorname{sen}\theta)\alpha) + \gamma \\
& = & \alpha x_0 + \alpha^2(\cos\theta) + \alpha\beta(\operatorname{sen}\theta) + \beta y_0 + \beta^2(\cos\theta) - \alpha\beta(\operatorname{sen}\theta) + \gamma \\
& = & \alpha x_0 + \alpha^2(\cos\theta) + \beta y_0 + \beta^2(\cos\theta) + \gamma \\
& = & (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma) + (\alpha^2 + \beta^2)(\cos\theta) \\
& = & F(P_0) + (\alpha^2 + \beta^2)(\cos\theta)
\end{array}$$

2b)
$$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{d\theta} z(\theta) & = & \frac{d}{d\theta}((\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma) + (\alpha^2 + \beta^2)(\cos\theta)) \\
& = & (\alpha^2 + \beta^2)(-\operatorname{sen}\theta)
\end{array}$$

Gabarito da 3

Lembre que $A = [2,4]$. Temos:

$$\begin{array}{rrcl}
 & A & & \text{não é aberto} \\
\Leftrightarrow & A & \not\subset & \mathrm{Int}(A) \\
\Leftrightarrow & A & \not\subset & \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\} \\
\Leftrightarrow & [2,4] & \not\subset & \{\, P \in [2,4] \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq [2,4] \,\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\Leftrightarrow & \exists x \in [2,4].\ x \notin \{\, P \in [2,4] \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq [2,4] \,\} \\
\Leftrightarrow & \exists x \in [2,4].\neg(x \in \{\, P \in [2,4] \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq [2,4] \,\}) \\
\Leftrightarrow & \exists x \in [2,4].\neg(x \in [2,4] \land \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(x) \subseteq [2,4]) \\
\Leftrightarrow & \exists x \in [2,4].(\neg x \in [2,4]) \lor (\neg\, \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(x) \subseteq [2,4]) \\
\Leftrightarrow & \exists x \in [2,4].(\neg x \in [2,4]) \lor (\forall \varepsilon > 0.\neg(\mathsf{B}_\varepsilon(x) \subseteq [2,4])) \\
\Leftrightarrow & \exists x \in [2,4].(\neg x \in [2,4]) \lor (\forall \varepsilon > 0.\neg(\forall y \in \mathsf{B}_\varepsilon(x).\ y \in [2,4])) \\
\Leftrightarrow & \exists x \in [2,4].(\neg x \in [2,4]) \lor (\forall \varepsilon > 0.\ \exists y \in \mathsf{B}_\varepsilon(x).\ \neg y \in [2,4])) \\
\Leftrightarrow & \ldots
\end{array}$$